

П.А.ЛОПОВ



РАСЧЕТ ЧАСТОТНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ



« ЭНЕРГИЯ »

БИБЛИОТЕКА ПО РАДИОЭЛЕКТРОНИКЕ

П. А. ПОПОВ

РАСЧЕТ ЧАСТОТНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ

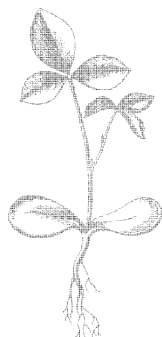


ИЗДАТЕЛЬСТВО „ЭНЕРГИЯ“

МОСКВА

1966

ЛЕНИНГРАД



Scan AAW

В книге излагаются теория и порядок расчета цепочечных и мостовых частотных электрических фильтров. Рассматриваются свойства фильтра нижних частот, способы задания требований к фильтру, выбор параметров оконечных полувзвешен, определение оптимальных параметров m аналитическим способом и с помощью шаблона, расчет фильтров верхних частот, полосовых и заграждающих методом преобразования частоты.

Книга предназначена для инженеров и техников, работающих в области электрической связи, и может служить пособием для студентов вузов при курсовом и дипломном проектировании.



Попов Петр Александрович

РАСЧЕТ ЧАСТОТНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ

М.—Л., издательство „Энергия“, 216 стр. с илл.

3-4-1

345-66

Редактор А. Г. Соколов

Техн. редактор Т. Н. Царева

Обложка художника Е. В. Никитина

Сдано в набор 22/X 1965 г.

Подписано в печать 7/II 1966 г.

Т-01561 Бумага типографская № 1 84×108¹/₃₂

Печ. л. 11,34 Уч.-изд.л. 10,19

Тираж 10 000 экз.

Цена 64 коп.

Зак. 695

Московская типография № 10 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Шлюзовая наб., 10.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Знакомство с существующей обширной литературой, посвященной теории и расчету электрических фильтров, показывает, что большинство книг может быть отнесено к одной из двух категорий: работы популярно-ознакомительного характера (к ним по существу относятся и соответствующие главы большинства учебников радиотехники) и монографии, написанные на высоком математическом уровне и предназначенные в первую очередь для лиц, специализирующихся в области фильтростроения.

Книга, предлагаемая вниманию читателя, занимает промежуточное положение среди работ названных категорий.

Автор ставил своей целью написать пособие, которое помогло бы читателю, впервые встречающемуся с задачей расчета фильтров, технически грамотно сформулировать требования к ним и выполнить расчет по заданным рабочим параметрам. Поставленная цель определила содержание, объем и характер изложения материала.

Сведения по вопросам, не затронутым в книге, читатель сможет найти в рекомендуемой литературе.

В основу рассматриваемой методики расчета по заданным рабочим параметрам положено понятие о характеристических параметрах фильтрующих звеньев. Принятый способ изложения классической теории звеньев типа k или m несколько отличается от изложенного в большинстве учебников.

Во-первых, характеристическая постоянная передачи g звена фильтра определяется не через функции $\operatorname{sh} g$ и $\operatorname{ch} g$, а через функцию $\operatorname{th} g$, что облегчает в дальнейшем изложение теории шаблона Румпельта и теории аналитического определения оптимальных параметров m ,

а также вычисление параметров a и b многозвенных фильтров.

Во-вторых, сопротивления в продольной и поперечной ветвях Г-образного четырехполюсника обозначены не через $z_1/2$ и $2z_2$, а через z_1 и z_2 . Это позволяет рассматривать Т- или П-образные звенья как каскадное соединение двух Г-образных.

В результате этих изменений некоторые формулы в книге отличаются величиной коэффициентов от соответствующих формул, известных из других источников (об этом необходимо помнить во избежание недоразумений при чтении и ошибок при выполнении расчетов).

Значительное внимание в книге уделено методу преобразования частоты, который до настоящего времени не нашел никакого отражения в учебной литературе (единственным исключением является [Л. 5]), а также вопросам применения фильтрующих звеньев в качестве согласующих устройств (четыреполюсников) и преобразования схемы фильтра для работы между неодинаковыми нагрузочными сопротивлениями.

Прилагаемые таблицы должны облегчить практическое выполнение расчетов.

ВВЕДЕНИЕ

Исторически первым методом расчета (синтеза) цепочечных электрических частотных фильтров явился синтез по характеристическим параметрам. В основу метода было положено понятие о Г-образном звене фильтра как простейшей электрической схеме, обладающей свойствами фильтра. Подробно изучив свойства Г-образных звеньев и выбирая определенные звенья, можно составить из них многоэлементную схему с известными характеристическими параметрами.

В конце 30-х годов были сформулированы основы другого метода расчета, который получил название расчета по рабочим параметрам. При этом методе, задавшись требуемой частотной зависимостью затухания фильтра, аппроксимируют ее (т. е. находят ее приближенное аналитическое выражение) с помощью одной из подходящих для этого функций. Исходя из аппроксимирующего выражения, элемент за элементом получают в ходе расчета всю схему фильтра, которую в данном случае необходимо рассматривать как единое целое. Такой метод требует выполнения большого количества вычислений с высокой степенью точности (сохранение до пяти-шести значащих цифр в промежуточных выкладках). Поэтому в инженерной практике он не получил широкого распространения.

Однако число применяемых на практике способов аппроксимации пока сравнительно невелико (три-четыре), что дало возможность предварительно рассчитать определенное количество вариантов схем фильтров и оформить результаты расчета в виде таблиц. Такие таблицы есть в [Л. 1 и 9].

Достоинством метода расчета по рабочим параметрам является то, что фильтр рассчитывается непосредственно для работы между заданными сопротивлениями нагрузки, не зависящими от частоты, в то время как расчет по характеристическим параметрам первоначально предполагал нагрузку фильтра на частотно-зависимые характеристические сопротивления.

Но первый метод также совершенствовался. Были разработаны приемы, которые позволяют, исходя из характеристических параметров отдельных звеньев и всего фильтра, осуществить расчет фильтра по заданным рабочим параметрам. Изложению этого метода и посвящена данная книга.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

1. Понятие о четырехполюснике

При расчете электрической цепи в подавляющем большинстве случаев требуется определить напряжение на заданном сопротивлении нагрузки, если известны схема цепи, величина э. д. с. и внутреннее сопротивление генератора. Напряжение в этом случае можно найти, составив систему уравнений для контурных токов или узловых напряжений цепи и решив ее относительно интересующего нас тока или напряжения.

Другой путь решения этой задачи основан на том, что всю электрическую цепь, включенную между генератором и нагрузкой, рассматривают как одно целое и характеризуют ее электрические свойства, независимо от числа и характера составляющих ее элементов и от способа их соединения между собой, несколькими определенными величинами — параметрами схемы. При таком подходе неизбежно приходится выделять из всей заданной цепи четыре зажима: два входных для подключения генератора и два выходных для подключения нагрузки.

Электрическая цепь любой сложности, имеющая четыре выделенных зажима, называется четырехполюсником (рис. 1).

Напряжение и ток, относящиеся к входным зажимам, обозначим как U_1 и I_1 , а к выходным зажимам — как U_2 и I_2 . Сопротивление нагрузки обозначим через Z_n . Положительные направления токов и напряжений показаны на рис. 1 стрелками.

Четырехполюсник, в котором отсутствуют источники электрической энергии, называется *пассивным*. Связь между напряжениями и токами на входе и выходе пас-

сивного четырехполюсника при определенной фиксированной частоте можно полностью охарактеризовать с помощью трех величин, которые называются *параметрами* четырехполюсника и образуют систему параметров. Известно несколько систем параметров.

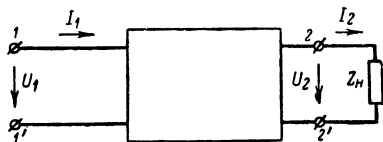


Рис. 1. Условное изображение четырехполюсника.

Метод расчета фильтров, который мы будем рассматривать ниже, основан на системе ха

рактеристических параметров четырехполюсника. Такими параметрами являются характеристические сопротивления Z_{c1} со стороны зажимов 1-1' и Z_{c2} со стороны зажимов 2-2' и характеристическая постоянная передачи четырехполюсника g .

2. Характеристические сопротивления четырехполюсника

Понятие о характеристических сопротивлениях можно получить, рассматривая рис. 2. Замкнем зажимы 2-2' четырехполюсника накоротко (рис. 2,а, вверху), что равносильно подключению к этим зажимам сопротивления

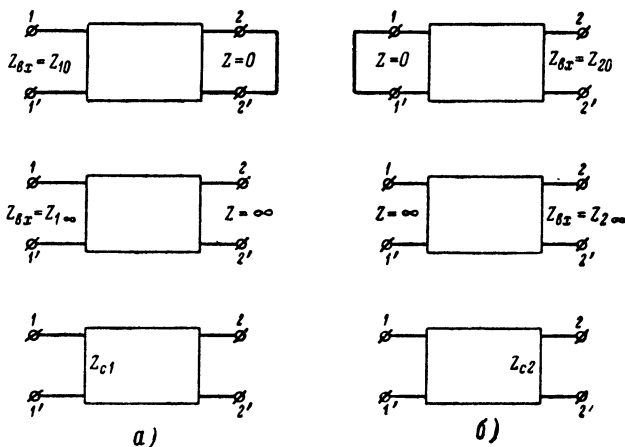


Рис. 2. Определение характеристических сопротивлений четырехполюсника.

$Z=0$, и измерим или вычислим величину входного сопротивления четырехполюсника со стороны зажимов $1-1'$. (Входным сопротивлением четырехполюсника со стороны, например, зажимов $1-1'$ называется величина $Z_{вх1}=U_1/I_1$, где I_1 — ток, который установится во входной цепи, если к рассматриваемым зажимам приложено напряжение U_1 .) Обозначим полученную величину символом Z_{10} , т. е. $Z_{вх1}=Z_{10}$, где первая цифра в индексе указывает, между какими зажимами измеряется входное сопротивление, а вторая — при каком сопротивлении нагрузки выполняется измерение.

Затем определим величину входного сопротивления четырехполюсника со стороны тех же зажимов при разомкнутых выходных зажимах. Обозначим ее символом $Z_{1\infty}$ (рис. 2,а, средний). Тогда величину

$$Z_{c1} = \sqrt{Z_{10} Z_{1\infty}} \quad (1)$$

будем называть характеристическим сопротивлением четырехполюсника, измеренным со стороны зажимов $1-1'$.

Величину характеристического сопротивления показывают на условном изображении четырехполюсника так, как это сделано на рис. 2,а внизу.

Измерив аналогично входное сопротивление того же четырехполюсника со стороны зажимов $2-2'$ при замкнутых накоротко, а затем при разомкнутых зажимах $1-1'$, можно найти величину характеристического сопротивления четырехполюсника со стороны зажимов $2-2'$ (рис. 2,б):

$$Z_{c2} = \sqrt{Z_{20} Z_{2\infty}}. \quad (2)$$

Пример 1. Определить характеристические сопротивления Z_{c1} и Z_{c2} четырехполюсника, состоящего из двух активных сопротивлений (рис. 3,а).

Решение 1. Определяем входное сопротивление со стороны зажимов $1-1'$. При замкнутых накоротко зажимах $2-2'$

$$Z_{вх} = Z_{10} = 500 \text{ ом.}$$

При разомкнутых зажимах $2-2'$

$$Z_{вх} = Z_{1\infty} = 500 + 500 = 1\,000 \text{ ом.}$$

2. Находим характеристическое сопротивление Z_{c1} :

$$Z_{c1} = \sqrt{Z_{10} Z_{1\infty}} = \sqrt{500 \cdot 1\,000} = 707 \text{ ом.}$$

3. Аналогично находим со стороны зажимов 2-2':

$$Z_{20} = \frac{500 \cdot 500}{500 + 500} = 250 \text{ ом};$$

$$Z_{2\infty} = 500 \text{ ом};$$

$$Z_{c2} = \sqrt{Z_{20} Z_{2\infty}} = \sqrt{250 \cdot 500} = 353,5 \text{ ом}.$$

Условное изображение этого четырехполюсника показано на рис. 3,б.

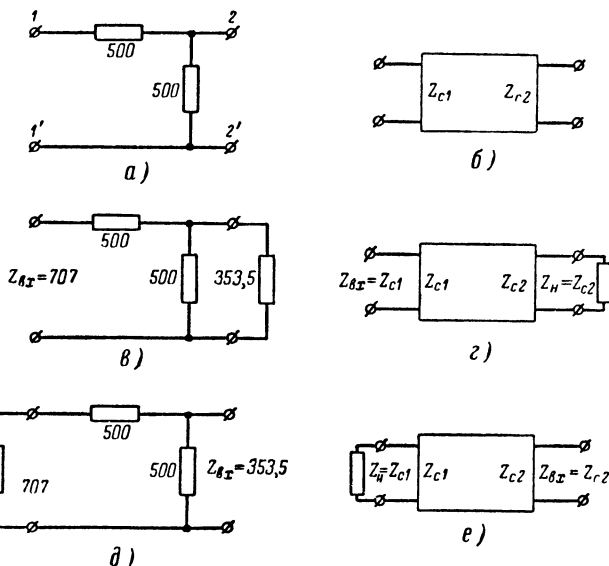


Рис. 3. К понятию о согласованной нагрузке четырехполюсника.

Одно из важнейших свойств пассивного четырехполюсника поясняется следующим примером.

Пример 2. Определить входное сопротивление четырехполюсника (рис. 3,а) со стороны зажимов 1-1' при нагрузке зажимов 2-2' на сопротивление $Z_H = Z_{c2} = 353,5 \text{ ом}$ (рис. 3,в).

Решение.

$$Z_{вх} = 500 + \frac{500 \cdot 353,5}{500 + 353,5} = 707 \text{ ом},$$

т. е. $Z_{вх} = Z_{c1}$.

Полученный результат не является случайным совпадением. Можно строго доказать, что при нагрузке (зажимов 2-2') четырехполюсника на сопротивление $Z_H = Z_{c2}$

входное сопротивление четырехполюсника со стороны зажимов $1-1'$ всегда будет равно величине Z_{c1} (рис. 3,з). Точно так же, включив между зажимами $1-1'$ сопротивление $Z=Z_{c1}$, всегда получим входное сопротивление со стороны зажимов $2-2'$ равным величине характеристического сопротивления Z_{c2} (рис. 3,д и е).

Четырехполюсник, нагруженный на характеристическое сопротивление, вычисленное со стороны нагружаемых зажимов, называется нагруженным согласованно. При согласованной нагрузке одной пары зажимов четырехполюсника его входное сопротивление со стороны другой пары зажимов равно характеристическому сопротивлению, вычисленному со стороны этой же (другой) пары зажимов.

Четырехполюсник, у которого характеристические сопротивления Z_{c1} и Z_{c2} равны друг другу, называется *симметричным*. Характеристическое сопротивление симметричного четырехполюсника обозначают символом Z_c (без цифры в индексе).

3. Характеристическая постоянная передачи четырехполюсника

Третьим характеристическим параметром четырехполюсника, наряду с величинами Z_{c1} и Z_{c2} , является характеристическая постоянная передачи. *Характеристической* (или собственной) *постоянной* передачи четырехполюсника называется величина

$$g = \frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} \text{ при } Z_H = Z_{c2}, \quad (3)$$

где U_1 — комплексная амплитуда напряжения между входными зажимами $1-1'$; I_1 — комплексная амплитуда входного тока четырехполюсника, найденные при условии нагрузки зажимов $2-2'$ последнего на сопротивление $Z_H=Z_{c2}$ (рис. 4); U_2 и I_2 — соответственно комплексные амплитуды напряжения и тока в сопротивлении нагрузки в этой же схеме, т. е. при $Z_H=Z_{c2}$.

Напомним, что произведение комплексной амплитуды напряжения U , приложенного к некоторому сопротивлению Z , на комплексную амплитуду тока I , проходящего по этому сопротивлению, нельзя смешивать с величиной

полной комплексной мощности S , которая равна произведению комплексной амплитуды напряжения U на комплексно-сопряженную амплитуду тока, обозначаемую символом I^* :

$$S = UI^*,$$

где

$$I = |I| e^{j\varphi},$$

$$I^* = |I| e^{-j\varphi}.$$

Читателю, впервые встречающемуся с понятием о характеристической постоянной передачи, оно может показаться довольно сложным: во-первых, берется половина натурального логарифма отношения двух величин, в то время как можно было бы взять само это отношение; во-вторых, специально оговаривается величина сопротивления нагрузки.

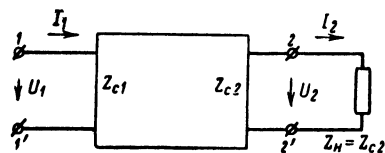


Рис. 4. К определению характеристической постоянной передачи четырехполюсника.

Такая кажущаяся сложность выбранной величины, как увидим далее, объясняется удобством расчета сложных электрических цепей.

Записав формулу (3) в несколько ином виде:

$$g = \frac{1}{2} \ln \frac{|U_1| e^{j\varphi_{U1}} |I_1| e^{j\varphi_{I1}}}{|U_2| e^{j\varphi_{U2}} |I_2| e^{j\varphi_{I2}}} = a + jb,$$

убеждаемся, что характеристическая постоянная передачи g является комплексной величиной.

Ее действительная часть

$$a = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} \right| \quad (4)$$

характеризует соотношение между амплитудами токов и напряжений на входных и выходных зажимах четырехполюсника. Величина a называется характеристическим или собственным затуханием четырехполюсника. Мнимая часть величины g

$$b = \frac{1}{2} (\varphi_{U1} + \varphi_{I1} - \varphi_{U2} - \varphi_{I2}) \quad (5)$$

характеризует соотношение между фазами комплексных амплитуд напряжений и токов на входе и выходе четырехполюсника и называется характеристической фазовой постоянной четырехполюсника.

Из схемы измерения характеристической постоянной передачи (рис. 4) следует:

$$I_2 = \frac{U_2}{Z_{c2}},$$

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_{вх1}} = \frac{U_1}{Z_{c1}}$$

(зажимы 2-2' четырехполюсника замкнуты на сопротивление Z_{c2} , и поэтому входное сопротивление, измеренное между зажимами 1-1', равно величине Z_{c1}).

Подставив значения I_1 и I_2 в формулу (3), получим:

$$g = \ln \frac{U_1}{U_2} + \frac{1}{2} \ln \frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}. \quad (6)$$

В случае симметричного четырехполюсника, в котором $Z_{c1} = Z_{c2} = Z_c$, второе слагаемое обращается в нуль, и формула приобретает вид:

$$g = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{|U_1| e^{j\varphi_{U1}}}{|U_2| e^{j\varphi_{U2}}} = a + jb, \quad (7)$$

где

$$a = \ln \left| \frac{U_1}{U_2} \right|, \quad (8)$$

$$b = \varphi_{U1} - \varphi_{U2}. \quad (9)$$

Таким образом, в симметричном четырехполюснике величина a характеризует соотношение между амплитудами напряжений на входе и выходе четырехполюсника, а величина b — разность фаз между этими же напряжениями.

Характеристическое затухание a измеряется в неперах (*неп*). Понятие о затухании в 1 *неп* можно получить, приняв в формуле (8) $a = 1$ *неп*:

$$1 = \ln \left| \frac{U_1}{U_2} \right|.$$

Потенцируя, получим:

$$\left| \frac{U_1}{U_2} \right| = e^1,$$

где $e=2,72\dots$ — основание натуральных логарифмов.

Следовательно, затуханию в 1 *неп* соответствует уменьшение напряжения в e раз и уменьшение мощности в e^2 раз.

Чем больше величина характеристического затухания a , тем меньше величина $|U_2|$ по сравнению с $|U_1|$. Если же характеристическое затухание a симметричного четырехполюсника равно нулю, это означает, что напряжение U_2 по модулю равно напряжению U_1 .

Характеристическая фазовая постоянная b измеряется в радианах (*рад*).

Пример 3. Характеристическое затухание симметричного четырехполюсника равно 3 *неп*. Определить напряжение $|U_2|$ на выходных зажимах четырехполюсника при согласованной ($Z_n=Z_c$) нагрузке, если напряжение U_1 на входных зажимах равно 1,5 в.

Решение. Потенцируя (8) и решая относительно $|U_2|$, находим:

$$|U_2| = |U_1| e^{-a} = 1,5 e^{-3} = 0,745 \text{ в.}$$

Один из распространенных способов определения характеристической постоянной передачи g четырехполюсника заключается в следующем. Измеряют величины входного сопротивления четырехполюсника со стороны одной пары зажимов (1-1' или 2-2') сначала при замкнутой накоротко, а затем при разомкнутой другой паре зажимов и вычисляют вспомогательную функцию:

$$\text{th } g = \sqrt{\frac{Z_{10}}{Z_{1\infty}}} = \sqrt{\frac{Z_{20}}{Z_{2\infty}}}, \quad (10)$$

где $\text{th } g$ — гиперболический тангенс аргумента g .

Зная величину функции $\text{th } g$, можно найти по таблицам величину ее аргумента.

4. Понятие о гиперболических функциях

Гиперболическим синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом аргумента g называются соответственно функции:

$$\text{sh } g = \frac{e^g - e^{-g}}{2}; \quad (11)$$

$$\operatorname{ch} g = \frac{e^g + e^{-g}}{2}; \quad (12)$$

$$\operatorname{th} g = \frac{\operatorname{sh} g}{\operatorname{ch} g} = \frac{e^g - e^{-g}}{e^g + e^{-g}}; \quad (13)$$

$$\operatorname{cth} g = \frac{1}{\operatorname{th} g}, \quad (14)$$

где g в общем виде представляет собой комплексную величину:

$$g = a + jb.$$

При комплексном значении g величина e^g также должна быть комплексной:

$$e^g = e^{a+jb} = e^a e^{jb} = e^a (\cos b + j \sin b). \quad (15)$$

Поэтому гиперболические функции от комплексного аргумента в общем виде являются величинами комплексными.

Рассмотрим несколько частных случаев, знание которых потребуется в дальнейшем.

1. Если g не комплексная, а действительная величина ($g=a$, $b=0$), то гиперболические функции аргумента g также будут действительными величинами. Графики функций $\operatorname{th} a$ и $\operatorname{cth} a$, построенные по формулам (13) и (14), показаны на рис. 5.

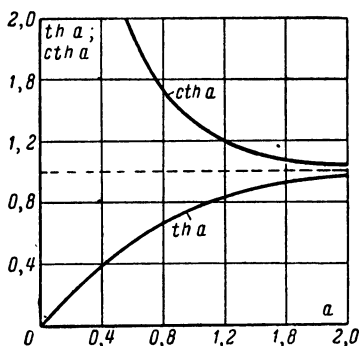


Рис. 5. Графики функций $\operatorname{th} a$ и $\operatorname{cth} a$.

Из формул и рис. 5 следует, что при изменении (увеличении) a от нуля до бесконечности значение функции $\operatorname{th} a$ монотонно возрастает от нуля до единицы, а значение функции $\operatorname{cth} a$ монотонно убывает от бесконечности до единицы. Значения функций $\operatorname{th} a$ и $\operatorname{cth} a$ для значений a от 0 до 5 даны в табл. 1 в конце книги.

2. Подставив в формулу (13) значение e^g из (15), после несложных преобразований получим:

$$\operatorname{th} g = \operatorname{th}(a + jb) = \frac{\operatorname{th} a + j \operatorname{tg} b}{1 + j \operatorname{th} a \operatorname{tg} b}. \quad (16)$$

Анализируя эту формулу, убеждаемся в следующем:

а) функция $\operatorname{th} g$ будет чисто мнимой, а не комплексной величиной только в том случае, если g — мнимая величина. Действительно, при $a=0$ и $g=jb$

$$\operatorname{th} g = \operatorname{th} jb = j \operatorname{tg} b; \quad (17)$$

б) функция $\operatorname{th} g$ при $b \neq 0$ может быть действительной, а не комплексной величиной в двух случаях: во-первых, при $a \neq 0$ и $b=n\pi$, где n — любое целое число, и, во-вторых, при $a \neq 0$ и $b = \frac{\pi}{2} + n\pi$.

Подставляя оба значения g в формулу (16), убеждаемся, что

при $a \neq 0$ и $b = n\pi$

$$\operatorname{th} g = \operatorname{th} (a + jn\pi) = \operatorname{th} a \leq 1, \quad (18)$$

а при $a \neq 0$ и $b = \frac{\pi}{2} + n\pi$

$$\operatorname{th} g = \operatorname{th} \left[a + j \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right) \right] = \operatorname{cth} a \geq 1. \quad (19)$$

Пример 4. По известным значениям функции $\operatorname{th} g$ определить величину ее аргумента g :

а) $\operatorname{th} g = j$; б) $\operatorname{th} g = 0,5$; в) $\operatorname{cth} g = 2$.

Решение. а) Значение функции представляет собой мнимую величину, поэтому для определения g следует воспользоваться формулой (17):

$$\operatorname{th} g = j \operatorname{tg} b = j.$$

Отсюда

$$b = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} + n\pi.$$

б) Значение функции — действительная величина, меньшая единицы, поэтому воспользуемся формулой (18):

$$\operatorname{th} g = \operatorname{th} a = 0,5.$$

С помощью графика на рис. 5 или табл. 1 по известной функции $\operatorname{th} a$ находим величину ее аргумента a :

$$a = \operatorname{Arth} 0,5 = 0,55.$$

Общий вид искомого аргумента:

$$g = 0,55 + jn\pi.$$

в) Значение функции — действительная величина, бóльшая единицы. Поэтому применяем формулу (19):

$$\operatorname{th} g = \operatorname{cth} a = 2.$$

По графику на рис. 5 или по табл. 1 находим:

$$a = \operatorname{Arcth} 2 = 0,55.$$

Общий вид искомого аргумента:

$$g = 0,55 + j \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right).$$

Читатель вероятно заметил, что символ Ag в сочетании с обозначением гиперболической функции имеет такой же смысл, как и символ agc в сочетании с обозначением тригонометрической функции. В обоих случаях эти символы служат для обозначения аргумента той функции, перед которой они написаны.

Теперь рассмотрим применение формулы (10) на конкретном примере.

Пример 5. Определить характеристическую постоянную передачи четырехполюсника (рис. 3,а).

Решение. У этого четырехполюсника $Z_{10} = 500 \text{ ом}$, $Z_{1\infty} = 1000 \text{ ом}$.

$$\operatorname{th} g = \sqrt{\frac{Z_{10}}{Z_{1\infty}}} = \sqrt{\frac{500}{1000}} = 0,707.$$

Величина $\operatorname{th} g$ действительна и меньше единицы, поэтому для определения g воспользуемся формулой (18):

$$a = \operatorname{Arth} 0,707 = 0,87.$$

Общий вид искомого аргумента:

$$g = 0,87 + jn\pi.$$

Но рассматриваемый четырехполюсник не содержит реактивных элементов, и его выходное напряжение совпадает по фазе со входным. Следовательно, $g = a = 0,87 \text{ nep}$.

5. Соединение четырехполюсников по принципу согласования характеристических сопротивлений

На рис. 6 изображена схема, состоящая из трех четырехполюсников. В этой схеме выходные зажимы первого четырехполюсника соединены со входными зажима-

ми второго, а выходные зажимы второго — со входными зажимами третьего. Такое соединение четырехполюсников называется цепочечным или каскадным.

Схема на рис. 6 имеет одну интересную особенность. Четырехполюсники 1, 2 и 3 подобраны или рассчитаны таким образом, что характеристическое сопротивление со стороны выходных зажимов 2-2' первого из них равно

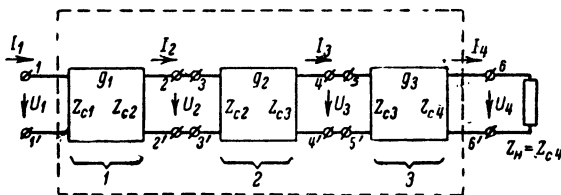


Рис. 6. Цепочечное соединение четырехполюсников.

характеристическому сопротивлению со стороны входных зажимов 3-3' второго. Аналогично характеристическое сопротивление Z_{c3} со стороны выходных зажимов 4-4' второго четырехполюсника равно характеристическому сопротивлению со стороны входных зажимов 5-5'

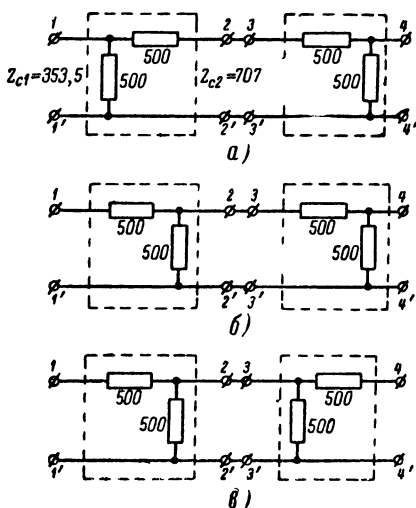


Рис. 7. К примеру 6.

третьего четырехполюсника. Иными словами, у каждого двух смежных четырехполюсников характеристические сопротивления со стороны тех пар зажимов, которые соединяются друг с другом, оказываются равными друг другу. Такое соединение четырехполюсников называется соединением по принципу согласования характеристических сопротивлений.

Пример 6. В какой из схем на рис. 7 четырехполюсники соединены по прин-

цепи согласования характеристических сопротивлений? Указанные на рисунке величины характеристических сопротивлений исходных четырехполюсников были найдены в примере 1.

Решение. В схеме на рис. 7,а характеристическое сопротивление первого четырехполюсника со стороны зажимов 2-2' равно 707 ом. Этой же величине равно и характеристическое сопротивление второго четырехполюсника со стороны зажимов 3-3'. Следовательно, четырехполюсники соединены по принципу согласования характеристических сопротивлений.

В схеме рис. 7,б характеристическое сопротивление со стороны зажимов 2-2' первого четырехполюсника не равно характеристическому сопротивлению со стороны зажимов 3-3' второго четырехполюсника. Соединение по принципу согласования характеристических сопротивлений в данном случае не имеет места.

Наконец, в схеме на рис. 7,в четырехполюсники соединены по принципу согласования характеристических сопротивлений.

Электрическую цепь, состоящую из нескольких цепочно соединенных четырехполюсников, в свою очередь можно рассматривать как некоторый четырехполюсник. Определим характеристические параметры Z_{c1a} , Z_{c2a} и g_a четырехполюсника, эквивалентного трем четырехполюсникам, соединенным цепочно по принципу согласования характеристических сопротивлений (рис. 6).

Третий четырехполюсник в упомянутой схеме нагружен согласованно ($Z_H = Z_{c4}$). Поэтому его входное сопротивление со стороны зажимов 5-5' равно величине характеристического сопротивления Z_{c3} со стороны этих же зажимов (5-5'). Но входное сопротивление третьего четырехполюсника служит сопротивлением нагрузки второго четырехполюсника, характеристическое сопротивление которого со стороны зажимов 4-4' также равно величине Z_{c3} . Таким образом, второй четырехполюсник оказывается нагруженным согласованно и поэтому его входное сопротивление со стороны зажимов 3-3' должно быть равно характеристическому сопротивлению Z_{c2} со стороны этих же зажимов. Следовательно, первый четырехполюсник также окажется нагруженным согласованно, и его входное сопротивление со стороны зажимов 1-1' будет равно величине Z_{c1} . Итак, при нагрузке зажимов 6-6' на сопротивление $Z_H = Z_{c4}$ входное сопротивление эквивалентного четырехполюсника со стороны зажимов 1-1' будет равно величине Z_{c1} .

Если же замкнуть зажимы 1-1' на сопротивление $Z = Z_{c1}$, то, рассуждая как и в предыдущем случае, можно убедиться, что входное сопротивление эквивалентного

четыреполюсника со стороны зажимов 6-6' равно величине Z_{c4} . Но это значит, что сопротивления Z_{c1} и Z_{c4} являются характеристическими сопротивлениями четырехполюсника, эквивалентного трем исходным, соединенным цепочечно: $Z_{c1a}=Z_{c1}$; $Z_{c2a}=Z_{c4}$.

Рассмотрим далее соотношения между токами и напряжениями на отдельных участках цепи. Каждый из трех четырехполюсников (рис. 6) работает в условиях согласованной нагрузки. Поэтому, например, для комплексных амплитуд токов и напряжений на входе и выходе первого четырехполюсника справедливо равенство:

$$\frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} = g_1,$$

или

$$\frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} = e^{2g_1}. \quad (20)$$

Аналогичные соотношения имеют место для второго и третьего четырехполюсников:

$$\frac{U_2 I_2}{U_3 I_3} = e^{2g_2}; \quad (21)$$

$$\frac{U_3 I_3}{U_4 I_4} = e^{2g_3}. \quad (22)$$

Перемножив отдельно левые и отдельно правые части равенств (20)—(22) и приравняв произведения, получим:

$$\frac{U_1 I_1}{U_4 I_4} = e^{2g_1} e^{2g_2} e^{2g_3} = e^{2(g_1 + g_2 + g_3)},$$

или после логарифмирования

$$\frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{U_4 I_4} = g_1 + g_2 + g_3$$

(при $Z_H = Z_{c2a}$).

Левая часть этого равенства представляет собой формулу для определения характеристической постоянной передачи g_3 эквивалентного четырехполюсника.

Следовательно,

$$g_3 = g_1 + g_2 + g_3. \quad (23)$$

Итак, при соединении любого числа четырехполюсников по принципу согласования характеристических сопротивлений характеристическая постоянная передачи эквивалентного четырехполюсника будет равна сумме характеристических постоянных передачи исходных четырехполюсников, а характеристические сопротивления эквивалентного четырехполюсника будут равны соответствующим характеристическим сопротивлениям исходных четырехполюсников.

Пример 7. Определить характеристические параметры четырехполюсника, эквивалентного двум цепочно соединенным четырехполюсникам, показанным на рис. 7,а.

Решение. Четырехполюсники соединены по принципу согласования характеристических сопротивлений. Поэтому характеристическое сопротивление эквивалентного четырехполюсника со стороны зажимов 1-1' равно

$$Z_{c1a} = Z_{c1} = 353,5 \text{ ом},$$

со стороны зажимов 4-4'

$$Z_{c2a} = Z_{c1} = 353,5 \text{ ом}.$$

Характеристическая постоянная передачи (см. пример 5)

$$g_a = g_1 + g_2 = 0,87 + 0,87 = 1,74 \text{ неп.}$$

Формула (23) свидетельствует об одном важном преимуществе логарифмических единиц для измерения характеристического затухания. Опираясь на логарифмы величин, а не на сами величины, удается заменить перемножение величин сложением их логарифмов, что значительно облегчает расчеты.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ЗВЕНЬЯ ТИПА k и m ФИЛЬТРОВ НИЖНИХ ЧАСТОТ

6. Понятие о частотном электрическом фильтре

В классической теории фильтров частотным электрическим фильтром называют такой четырехполюсник, собственное затухание которого в определенном диапазоне частот равно нулю и отличается от нуля на всех остальных частотах. Диапазон частот, в котором затухание равно нулю, называют полосой пропускания фильтра. Диапазон частот, в котором затухание не равно нулю, называют полосой задерживания.

В зависимости от того, какой участок оси частот занимает полоса пропускания, различают фильтры нижних частот, фильтры верхних частот, полосовые и заграждающие (режекторные) фильтры.

График частотной зависимости собственного затухания идеального фильтра нижних частот показан на рис. 8,а. Этот фильтр пропускает токи всех частот от $f=0$ до $f=f_c$ и задерживает токи тех частот, которые лежат выше f_c . Идеальным фильтр назван потому, что при переходе от полосы пропускания к полосе задерживания его затухание меняется скачком, что невозможно в реальных фильтрах.

В отличие от фильтра нижних частот фильтр верхних частот, наоборот, задерживает токи с частотами от $f=0$ до $f=f_c$ и пропускает токи более высоких частот (рис. 8,б).

На рис. 8,в и г показаны частотные зависимости характеристического (собственного) затухания полосового и заграждающего (режекторного) фильтров.

Мы подробно рассмотрим теорию и порядок расчета фильтра нижних частот, а затем распространим полученную методику на случаи расчета остальных видов фильтров.

Предостережем читателя от возможной ошибки в терминологии: не следует говорить «фильтр низких частот».

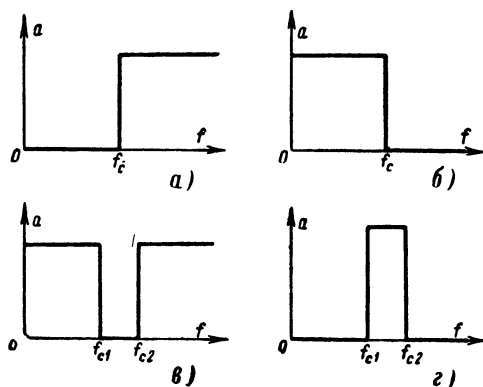


Рис. 8. Графики частотной зависимости затухания идеальных фильтров: нижних частот (а), верхних частот (б), полосового (в) и заграждающего (г).

Правильное название — «фильтр нижних частот». В самом деле, упомянутый фильтр пропускает не низкие частоты, а все частоты, которые лежат ниже частоты f_c . Сама же частота f_c может быть сколь угодно высокой.

Аналогично, было бы неверным название «фильтр высоких частот». Правильное название — «фильтр верхних частот».

7. Условие пропускания

Рассмотрим схему двухэлементного четырехполюсника, показанную на рис. 9. Учитывая конфигурацию этой схемы, ее называют Г-образным четырехполюсником или Г-образным звеном. Будем считать, что элементы (сопротивления z_1 и z_2) четырехполюсника состоят только из индуктивностей и емкостей. В этом случае вещественные (действительные) составляющие комплексных величин

сопротивлений z_1 и z_2 должны быть равны нулю, и величины z_1 и z_2 являются чисто мнимыми.

Практически катушки индуктивности и конденсаторы, из которых изготавливается подобный четырехполюсник, всегда имеют определенные потери, но эти потери сравнительно невелики, и ими можно пренебречь при первоначальном анализе схемы.

Характеристическую постоянную передачи Г-образного звена определим по формуле (10):

$$\operatorname{th} g_{\Gamma} = \sqrt{\frac{Z_{10}}{Z_{1\infty}}} = \sqrt{\frac{z_1}{z_1 + z_2}} = \sqrt{\frac{\frac{z_1}{z_2}}{1 + \frac{z_1}{z_2}}}. \quad (24)$$

Отношение двух мнимых величин, z_1 и z_2 , является действительной величиной, знак которой зависит от знаков z_1 и z_2 . Если в некотором диапазоне частот сопротивления z_1 и z_2 имеют одинаковые знаки, то их отношение, а следовательно, и функция $\operatorname{th} g_{\Gamma}$ будет в этом диапазоне частот также действительной положительной величиной.

(Отрицательное значение корня при анализе пассивного четырехполюсника не имеет физического смысла.)

Известно, что функция комплексного аргумента $\operatorname{th} g = \operatorname{th}(a + jb)$ будет действительной величиной только в том случае, если действительная часть аргумента не равна нулю. Следовательно, при одинаковых знаках обоих сопротивлений характеристическое затухание Г-образного четырехполюсника не может быть равным нулю и он не будет иметь полосы пропускания.

Предположим теперь, что сопротивления z_1 и z_2 имеют разные знаки. Легко убедиться, что пока модуль отношения z_1/z_2 превышает единицу, величина $\operatorname{th} g_{\Gamma}$ остается действительной. Значит, и в этом случае характеристическое затухание не будет равным нулю. Но как только модуль отношения z_1/z_2 станет меньше единицы, величина $\operatorname{th} g_{\Gamma}$ становится мнимой, а это означает, что действительная часть характеристической постоянной передачи становится равной нулю.

Предположим теперь, что сопротивления z_1 и z_2 имеют разные знаки. Легко убедиться, что пока модуль отношения z_1/z_2 превышает единицу, величина $\operatorname{th} g_{\Gamma}$ остается действительной. Значит, и в этом случае характеристическое затухание не будет равным нулю. Но как только модуль отношения z_1/z_2 станет меньше единицы, величина $\operatorname{th} g_{\Gamma}$ становится мнимой, а это означает, что действительная часть характеристической постоянной передачи становится равной нулю.

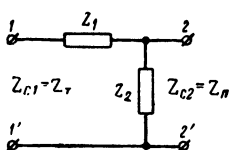


Рис. 9. Г-образный четырехполюсник.

Итак, характеристическое затухание Γ -образного реактивного четырехполюсника обязательно равно нулю в диапазоне частот, в котором выполняется неравенство:

$$-1 \leq \frac{z_1}{z_2} \leq 0. \quad (25)$$

Это и есть условие пропускания Γ -образного звена из реактивных элементов.

8. Γ -образное звено фильтра нижних частот

Предположим, что в схеме на рис. 9 символом z_1 обозначено сопротивление индуктивности L , а символом z_2 — сопротивление емкости C , тогда

$$z_1 = j\omega L, \quad (26)$$

$$z_2 = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C}. \quad (27)$$

Проверим, является ли полученная схема (рис. 10,а) фильтром, т. е. имеет ли она полосу пропускания и полосу задерживания. Для этого найдем отношение сопротивлений z_1 и z_2 :

$$\frac{z_1}{z_2} = -\omega^2 LC. \quad (28)$$

При $\omega < 1/\sqrt{LC}$ модуль отношения z_1/z_2 меньше единицы и характеристическое затухание четырехполюсника будет равно нулю. При $\omega > 1/\sqrt{LC}$ модуль отношения z_1/z_2 превышает единицу и характеристическое затухание не равно нулю. Следовательно, четырехполюсник на рис. 10,а в диапазоне частот от $\omega = 0$ до $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_c$ имеет полосу пропускания, а в диапазоне от $\omega = \omega_c$ до $\omega = \infty$ — полосу задерживания и является фильтром нижних частот.

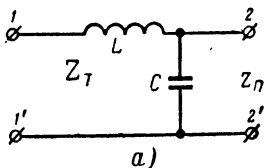
Частота ω_c , которая лежит на границе между полосой пропускания и полосой задерживания, называется предельной частотой фильтра или частотой среза фильтра:

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (29)$$

Отношение частоты ω к предельной частоте ω_c назовем нормированной частотой:

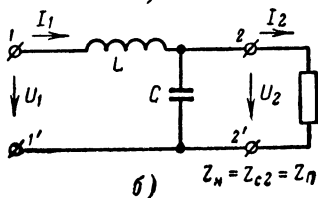
$$\eta = \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{f}{f_c}. \quad (30)$$

С учетом (29) и (30) соотношения для схемы рис. 10, а приобретают вид:



$$\frac{z_1}{z_2} = - \left(\frac{\Gamma \omega_1}{i \omega_c} \right)^2 = - \eta^2; \quad (31)$$

$$\text{th } g_\Gamma = \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}}. \quad (32)$$



Прежде чем приступить к анализу формулы (32), рассмотрим физическую сторону явлений. Из равенства нулю величины характеристического затухания a четырехполюсника в диапазоне от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_c$ следует, что на любой частоте в пределах этого диапазона при согласованной нагрузке соблюдается равенство:

$$\left| \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} \right| = e^0 = 1.$$

За пределами указанного диапазона любое изменение частоты повлечет за собой изменение величины a и отношения $|U_1 I_1 / U_2 I_2|$.

Чем же объяснить, что одна и та же схема «ведет себя по-разному» в диапазонах частот $0 \leq f < f_c$ и $f_c < f \leq \infty$? Чтобы ответить на

этот вопрос, рассмотрим, как изменяются характеристические сопротивления фильтра при изменении частоты от нуля и до бесконечности.

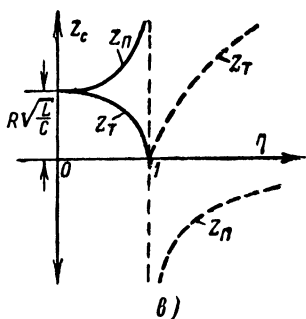


Рис. 10. Г-образное звено фильтра нижних частот (а и б) и частотные зависимости его характеристических сопротивлений (в).

Определяя величины Z_{10} , $Z_{1\infty}$, Z_{20} и $Z_{2\infty}$, находим, что характеристическое сопротивление четырехполюсника (рис. 9) со стороны зажимов 1-1' равно:

$$Z_{c1} = \sqrt{z_1(z_1 + z_2)} = \sqrt{z_1 z_2} \sqrt{1 + \frac{z_1}{z_2}}, \quad (33)$$

а со стороны зажимов 2-2' равно:

$$Z_{c2} = \sqrt{z_2 \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}} = \frac{\sqrt{z_1 z_2}}{\sqrt{1 + \frac{z_1}{z_2}}}. \quad (34)$$

Схема на рис. 9 со стороны зажимов 1-1' по конфигурации напоминает половину буквы Т. Поэтому характеристическое сопротивление Г-образного четырехполюсника (рис. 9) со стороны зажимов 1-1' часто обозначают не символом Z_{c1} , а символом Z_T . Конфигурация схемы со стороны зажимов 2-2' напоминает половину буквы П. Поэтому характеристическое сопротивление Z_{c2} Г-образного четырехполюсника в теории фильтров принято обозначать символом Z_{Π} .

Для схемы рис. 10,а

$$z_1 z_2 = j\omega L \frac{1}{j\omega C} = \frac{L}{C}.$$

Если обозначить

$$\frac{L}{C} = R^2, \quad (35)$$

то с учетом (31) формулы для Z_T и Z_{Π} в случае схемы рис. 10,а приобретают вид:

$$Z_T = R \sqrt{1 - \eta^2}; \quad (36)$$

$$Z_{\Pi} = \frac{R}{\sqrt{1 - \eta^2}}, \quad (37)$$

где

$$R = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (38)$$

— величина, называемая номинальным значением характеристического сопротивления.

Графики зависимостей $Z_T = \varphi_1(\eta)$ и $Z_{\Pi} = \varphi_2(\eta)$, построенные по формулам (36) и (37), показаны на рис. 11.

Из формул и графиков следует, что характеристические сопротивления Z_T и Z_{Π} четырехполюсника рис. 10,а при заданных величинах элементов L и C представляют собой функции нормированной частоты η . Замечательное свойство характеристических сопротивлений Z_T и Z_{Π}

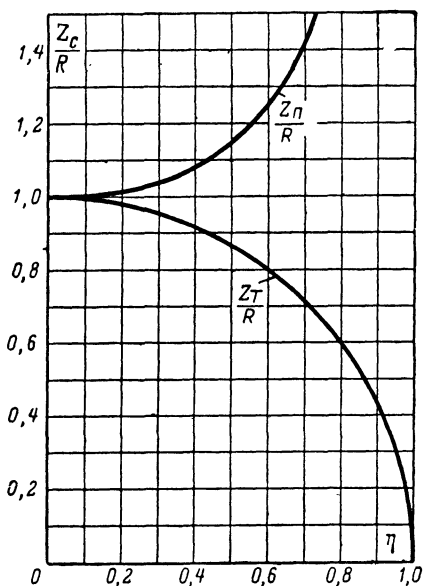


Рис. 11. Частотные зависимости характеристических сопротивлений Z_T и Z_{Π} в полосе пропускания.

заключается в том, что в полосе задерживания ($\eta > 1$) оба сопротивления являются мнимыми величинами, а в полосе пропускания ($0 \leq \eta \leq 1$) — действительными (вещественными) положительными величинами.

Отсюда важнейшее следствие: если рассматриваемый реактивный четырехполюсник нагрузить при любой частоте в полосе пропускания на действительное сопротивление, равное характеристическому сопротивлению со стороны нагружаемых зажимов, как показано на рис. 10,б, то его входное сопротивление со стороны двух других зажимов также

будет действительной величиной (равной Z_c со стороны этих зажимов), хотя схема четырехполюсника состоит из реактивных элементов.

Чтобы при переходе к другой частоте в полосе пропускания четырехполюсник остался нагруженным согласованно, необходимо изменить величину сопротивления нагрузки Z_{Π} . Входное сопротивление при этом также изменится. Но оба сопротивления (нагрузочное и входное) по-прежнему останутся вещественными.

Пример 8. Определить величину входного сопротивления четырехполосника рис. 10,б на частоте $f_1=2\,040$ гц при $Z_H=Z_{c2}=Z_\Pi$, если $R=600$ ом и $f_c=3\,400$ гц.

Решение.

$$1. \quad \eta_1 = \frac{f_1}{f_c} = \frac{2\,040}{3\,400} = 0,6.$$

2. При $f=f_1$ характеристическое сопротивление Z_Π равно:

$$Z_\Pi = \frac{R}{\sqrt{1-\eta_1^2}} = \frac{600}{\sqrt{1-0,6^2}} = 750 \text{ ом.}$$

3. При $Z_H=Z_\Pi=750$ ом входное сопротивление фильтра на частоте 2 040 гц будет равно величине характеристического сопротивления Z_T :

$$Z_{вх} = Z_T = R \sqrt{1-\eta_1^2} = 600 \sqrt{1-0,6^2} = 480 \text{ ом.}$$

Заметим, что формулы для определения величин элементов Г-образного звена по заданным параметрам R и ω_c легко получить из соотношений (29) и (38):

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{R}{\omega_c} = \frac{R}{2\pi f_c}; \\ C &= \frac{1}{\omega_c R} = \frac{L}{R^2}. \end{aligned} \right\} \quad (38a)$$

Итак, при любой частоте в пределах от $\omega=0$ до $\omega=1/\sqrt{LC}$ для четырехполосника рис. 10,а обязательно существует такое (единственное) вещественное сопротивление нагрузки R_H , при котором входное сопротивление четырехполосника также является вещественной величиной, хотя схема четырехполосника состоит из реактивных элементов.

При изменении частоты от 0 до ω_c это сопротивление меняется от величины R до бесконечности (сплошная кривая Z_Π на рис. 10,б). Входное сопротивление, соответственно, будет меняться от R до нуля (сплошная кривая Z_T на том же рисунке).

Если бы входное сопротивление четырехполосника было мнимой или комплексной величиной, это означало

бы, что в течение полупериода четырехполюсник потребляет энергию от подключенного к его входным зажимам источника, а в течение второй половины периода возвращает полученную энергию полностью или частично обратно источнику. Вещественный характер (отсутствие мнимой составляющей) входного сопротивления свидетельствует о том, что четырехполюсник в течение всего периода является только потребителем энергии.

Ранее мы предположили, что потери в катушке и конденсаторе отсутствуют. Следовательно, вся подводимая ко входным зажимам четырехполюсника мощность полностью попадает в сопротивление нагрузки и рассеивается в последнем. Этим и объясняется, что во всей полосе частот от 0 до f_c характеристическое затухание четырехполюсника (рис. 10,а) оказывается равным нулю. В полосе задерживания характеристическое сопротивление четырехполюсника становится мнимой величиной, а затухание отличается от нуля.

Какой знак (плюс или минус) следует взять перед корнем в формулах (36) и (37) при вычислении характеристического сопротивления в полосе задерживания? Легко убедиться, что входное сопротивление четырехполюсника (рис. 10,а) со стороны зажимов 1-1' как при разомкнутых, так и при замкнутых накоротко зажимах 2-2' в полосе задерживания имеет индуктивный характер. Поэтому в формуле (36) для сопротивления Z_T (рис. 10,а) оставляем перед корнем знак плюс.

Входное сопротивление того же четырехполюсника со стороны зажимов 2-2' как при разомкнутых, так и при замкнутых накоротко зажимах 1-1' в полосе задерживания имеет емкостный характер. Поэтому перед корнем в знаменателе формулы (37) также оставляем знак плюс. Характер частотной зависимости сопротивлений Z_T и Z_{Π} в полосе задерживания показан на рис. 10,в штриховыми линиями.

Заметим, что, вычисляя величину Z_T или Z_{Π} в полосе пропускания фильтра, мы также получаем два знака для величины сопротивления: плюс или минус. Но вещественная часть входного сопротивления пассивного четырехполюсника никогда не может быть отрицательной. Исходя из этого, нами и был выбран ранее знак плюс.

Теперь вернемся к анализу формулы для характеристической постоянной передачи Г-образного звена фильтра нижних частот:

$$\text{th } g_{\Gamma} = \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}}.$$

При изменении нормированной частоты η от 0 до 1 величина $\text{th } g_{\Gamma}$ остается мнимой и изменяется от 0 до ∞ . Следовательно, характеристическое затухание звена в этом диапазоне равно нулю, а характеристическая фазовая постоянная может быть вычислена по формулам:

$$\text{tg } b_{\Gamma} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}}; \quad (39)$$

$$b_{\Gamma} = \text{arctg } \frac{\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}}. \quad (40)$$

Построив векторную диаграмму токов и напряжений в схеме рис. 10,б для полосы пропускания, можно убедиться, что выходное напряжение \dot{U}_2 сдвинуто по фазе относительно входного напряжения \dot{U}_1 в сторону запаздывания на угол $0 \leq b_{\Gamma} \leq \pi/2$. Следовательно, величина b_{Γ} будет положительной, и перед корнем в формуле (39) необходимо оставить знак „плюс“.

При изменении η от 1 до ∞ величина $\text{th } g_{\Gamma}$ является действительной и изменяется в пределах от ∞ до 1. Это свидетельствует о том, что характеристическая фазовая постоянная остается во всем диапазоне равной $\pi/2$ рад, а характеристическое затухание изменяется от $a_{\Gamma} = 0$ неп до $a_{\Gamma} = \infty$ неп в соответствии с формулами:

$$\text{cth } a_{\Gamma} = \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}}, \quad (41)$$

$$a_{\Gamma} = \text{Arcth } \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}}. \quad (42)$$

Характер частотной зависимости величин a_{Γ} и b_{Γ} показан на рис. 12.

Точка на графике частотной зависимости характеристического затухания, соответствующая значению $a = \infty$,

называется полюсом затухания. В рассматриваемом случае полюс затухания лежит на бесконечно большой частоте, т. е. при $\eta = \infty$. Учитывая соотношения

$$|U_2| = |U_1| e^{-a} \text{ и } e^{-\infty} = 0,$$

приходим к выводу, что на частоте полюса затухания напряжение U_2 на выходных зажимах фильтра должно быть равно нулю при любом конечном значении U_1 .

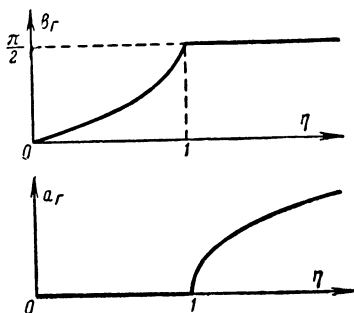


Рис. 12. Частотная зависимость характеристической фазовой постоянной и характеристического затухания Г-образного звена фильтра нижних частот.

Определение величины характеристического затухания Г-образного звена по заданной нормированной частоте η значительно ускорится, если воспользоваться графиком зависимости $a_r = \Phi(\eta)$, построенным по формуле (42). Такой график изображен на рис. 13.

Если затухание, даваемое одним звеном фильтра, оказывается недостаточным, составляют фильтр из нескольких звеньев, соединяя их по принципу согласования характеристических сопротивлений.

Пример 9. Из Г-образных звеньев фильтра нижних частот с предельной частотой $f_c = 3400$ гц составить схему такого фильтра нижних частот, характеристическое затухание которого на частотах, превышающих $f_1 = 4080$ гц, было бы не менее $a_0 = 2,3$ неп.

Решение. 1. Определяем нормированную частоту η_1 , соответствующую абсолютной частоте $f_1 = 4080$ гц:

$$\eta_1 = \frac{f_1}{f_c} = \frac{4080}{3400} = 1,2.$$

2. По графику на рис. 13 находим, что нормированной частоте $\eta = 1,2$ соответствует затухание Г-образного звена $a_r = 0,62$ неп.

3. Определяем, во сколько раз требуемая величина затухания a_0 превышает величину a_r :

$$\frac{a_0}{a_r} = \frac{2,3}{0,62} = 3,72.$$

Так как фильтр может состоять только из целого числа Г-образных звеньев, то, очевидно, для получения требуемого затухания a_0 придется взять четыре звена.

4. При составлении схемы фильтра из Г-образных звеньев необходимо помнить, что звенья должны быть соединены друг с другом по принципу согласования характеристических сопротивлений. Только при этом условии характеристическая постоянная передачи полученного четырехполосника будет равна сумме характеристических постоянных передачи соединяемых четырехполосников.

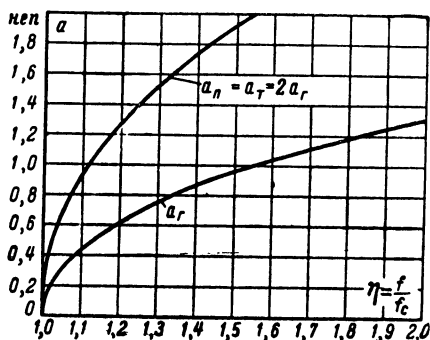


Рис. 13. Частотные зависимости характеристического затухания Г-, Т- и П-образного звеньев.

Возможные варианты такого соединения четырех звеньев показаны на рис. 14, а и б. В обоих случаях получаются симметричные четырехполосники. Но харак-

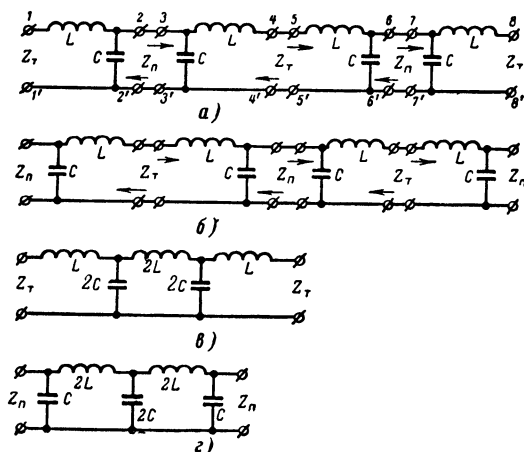


Рис. 14. К примеру 9.

теристическое сопротивление первой схемы соответствует типу Z_T , а второй схемы — типу Z_{II} .

Каждые две индуктивности или емкости, соединенные последовательно или параллельно, можно и необходимо заменить одним элементом, эквивалентным по величине. В результате такой замены уменьшается число элементов схемы без изменения ее электрических свойств, что позволяет удешевить фильтр.

Уменьшение числа элементов схемы без изменения ее электрических характеристик называется приведением схемы. Схема, в которой нельзя уменьшить число элементов, не изменяя одновременно ее электрических характеристик, называется приведенной.

Примеры приведенных схем рис. 14, а и б показаны соответственно на рис. 14, в и г.

9. Т- и П-образные звенья

В практике фильтростроения широко применяются Т-образное и П-образное звенья фильтра нижних частот. Т-образное звено получают, соединив друг с другом зажимы 2-2' двух одинаковых Г-образных звеньев, как

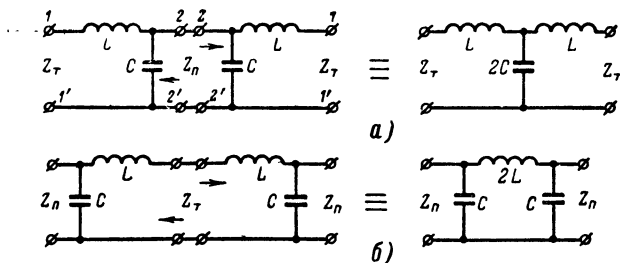


Рис. 15. Образование Т- и П-образного звеньев.

показано на рис. 15, а. Две емкости C , соединенные параллельно, заменяются одной эквивалентной емкостью $2C$, как показано на этом же рисунке. Конфигурация полученной схемы напоминает очертания буквы Т, чем и объясняется название звена.

Характеристические сопротивления обоих Г-образных звеньев имеют со стороны соединяемых зажимов одинаковую величину при любой частоте от $\eta=0$ до $\eta=\infty$ (звенья составлены из одинаковых индуктивностей

L и емкостей C). Следовательно, Γ -образные звенья соединены в данном случае по принципу согласования характеристических сопротивлений. Поэтому характеристическое сопротивление полученного симметричного T -образного звена будет равно величине Z_T , а характеристическая постоянная передачи T -образного звена будет равна удвоенной характеристической постоянной передачи Γ -образного звена:

$$g_T = 2g_\Gamma. \quad (43)$$

Соединив зажимы $1-1'$ двух Γ -образных звеньев, получим Π -образное звено фильтра нижних частот (рис. 15,б). Обе индуктивности L заменяются при этом одной эквивалентной индуктивностью $2L$. Легко догадаться, что название звена обусловлено конфигурацией его схемы. Как и в предыдущем случае, соединение осуществляется по принципу согласования характеристических сопротивлений. Характеристическое сопротивление полученного Π -образного симметричного звена равно величине Z_Π , характеристическая постоянная передачи равна удвоенной характеристической постоянной передачи Γ -образного звена:

$$g_\Pi = 2g_\Gamma = g_T = g = a + jb. \quad (44)$$

(С целью упрощения индексы « Π » и « T » при величине g в дальнейшем опускаем.)

С учетом (40), (42) и (44) получим расчетные формулы для T - и Π -образного звеньев фильтра нижних частот: в полосе пропускания

$$\operatorname{tg} \frac{b}{2} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} \quad (45)$$

и

$$a = 0; \quad (46)$$

в полосе задерживания

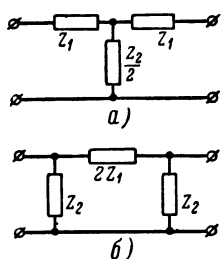
$$b = \pi \quad (47)$$

и

$$\operatorname{cth} \frac{a}{2} = \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}}. \quad (48)$$

Зависимость $a = \varphi(\eta)$ показана на рис. 13.

В общем виде схемы Т- и П-образного звеньев показаны на рис. 16, а и б, где символами z_1 и z_2 обозначены сопротивления исходных Г-образных звеньев. Отличительной особенностью всех рассмотренных звеньев



является то, что произведение сопротивлений z_1 и z_2 , из которых образовано звено, является постоянной, не зависящей от частоты величиной, хотя сами сопротивления z_1 и z_2 определенным образом зависят от частоты:

$$z_1 z_2 = j\omega L \frac{1}{j\omega C} = \frac{L}{C} = R^2 = \text{const.}$$

Рис. 16. Общий вид Т- и П-образного звеньев.

Звенья фильтров, для которых соблюдается это условие, называются звеньями постоянной k или звеньями типа k .

Учитывая, что Т- и П-образные звенья состоят из двух Г-образных, последние часто называют полувзвеньями.

10. Графический метод анализа звеньев

Характеристические параметры Г-образного звена при любой частоте полностью определяются величиной и знаком отношения z_1/z_2 . Если сопротивления z_1 и z_2 состоят не из одного, а из нескольких элементов, то аналитическое определение полосы пропускания становится затруднительным. Но эта же задача легко решается графическим методом. Метод заключается в том, что, используя общие оси координат, строят графики частотной зависимости сопротивлений z_1 и z_2 . Ось абсцисс является при этом осью частот (f или ω), а ось ординат — осью сопротивлений (jx). При построении графика вполне достаточно изобразить только характер частотной зависимости сопротивления, не прибегая ни к каким вычислениям. Построив обе кривые, легко обнаружить, выполняется ли, и на каком именно участке оси частот, условие пропускания

$$-1 \leq \frac{z_1}{z_2} \leq 0.$$

Затем определяют частоты, при которых $z_1/z_2 = \infty$. На каждой такой частоте лежит полюс характеристического затухания фильтра: величина $\text{th } g$ становится равной единице [см. формулу (10)], а характеристическое затухание фильтра — бесконечности.

Пример 10. Определить графическим методом, является ли четырехполюсник рис. 15,а фильтром, найти его полосу пропускания и частоту полюса характеристического затухания.

Решение. 1. В системе координат $(\omega; jx)$ строим графики частотной зависимости сопротивлений $z_1 = j\omega L$ и $z_2 = 1/j\omega C$ (рис. 17).

2. Сопротивления z_1 и z_2 имеют разные знаки во всем диапазоне частот от $\omega = 0$ до $\omega = \infty$. Поэтому для определения полосы пропускания остается найти на оси частот ω такие точки, при которых модуль отношения z_1/z_2 равнялся бы нулю и единице. Первой точкой является значение $\omega = \omega_1 = 0$, второй — $\omega = \omega_2$. В диапазоне частот $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ лежит полоса пропускания. В диапазоне частот $\omega_2 < \omega < \infty$ — полоса задерживания. Следовательно, схема рис. 15,а является фильтром нижних частот.

Величина z_1/z_2 становится равной бесконечности при $\omega = \infty$. Звено имеет только один полюс затухания, который находится в бесконечно удаленной точке оси частот.

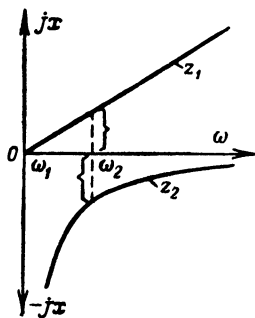


Рис. 17. К примеру 10.

11. Параллельно-производное звено типа m

Одним из двух основных недостатков звеньев типа k является то, что в значительной части полосы пропускания характеристические сопротивления Z_T и Z_{Π} сильно отличаются от своего номинального значения R . Вторым недостатком является медленное увеличение характеристического затухания при переходе от полосы пропускания к полосе задерживания. Из рис. 13 следует, например, что при $\eta = 1,2$ затухание Т- или П-образного звена составляет всего 1,3 *нп*. А ведь нормированная частота $\eta = 1,2$ соответствует изменению частоты на 20%¹ по сравнению с предельной, что является не такой уж малой величиной.

Как же обеспечить большую крутизну кривой $a = \varphi(\eta)$ при переходе от полосы пропускания к полосе

задерживания? Напрашивается мысль включить в качестве продольного сопротивления z_1 Г-образного звена параллельный колебательный контур, как показано на рис. 18, а, и выбрать резонансную частоту контура несколько выше требуемой предельной частоты f_c . На резонансной частоте сопротивление такого параллельного колебательного контура без потерь равно бесконечно

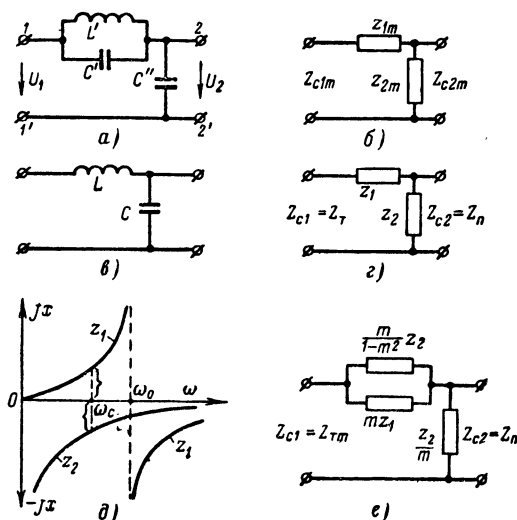


Рис. 18. Преобразование звена типа k в звено типа m .

а — принципиальная схема звена типа m ; б — обобщенная схема звена типа m ; в — принципиальная схема звена типа k ; г — обобщенная схема звена типа k ; д — определение полосы пропускания звена типа m ; е — развернутая обобщенная схема звена типа m .

большой величине. Поэтому если приложить напряжение резонансной частоты к зажимам 1-1', то оно будет полностью выделяться на сопротивлении параллельного контура, а напряжение U_2 на выходных зажимах 2-2' будет равно нулю. Полюс затухания переместится из бесконечно удаленной точки оси частот в точку, соответствующую резонансной частоте контура. Но верна ли эта идея? Будет ли вообще схема рис. 18, а фильтром? Проверим это графическим методом. На рис. 18, д изобра-

жены графики частотной зависимости сопротивлений z_1 и z_2 рассматриваемой схемы. (Напомним, что сопротивление параллельного колебательного контура по мере роста частоты от нуля до резонансной увеличивается от 0 до ∞ , сохраняя индуктивный характер. При переходе через резонансную частоту меняется знак сопротивления: оно приобретает емкостный характер и при дальнейшем увеличении частоты от резонансной до бесконечности изменяется по модулю от ∞ до 0.)

Анализируя отношение z_1/z_2 , убеждаемся, что звено рис. 18,а действительно имеет полосу пропускания в диапазоне частот от нуля до некоторой частоты ω_c , которая лежит ниже резонансной частоты ω_0 контура. Полоса задерживания занимает область частот от ω_c до бесконечности. При $\omega = \omega_0$ величина z_1/z_2 равна бесконечности. На этой частоте находится полюс затухания звена. Итак, звено является фильтром нижних частот.

Схема звена в общем виде изображена на рис. 18,б. Для сравнения на рис. 18,в и г изображены принципиальная и обобщенная схемы звена типа k фильтра нижних частот. В отличие от всех элементов и параметров звена типа k элементы и параметры нового звена помечены индексом m .

Из каких же условий исходить при определении величин L' , C' и C'' элементов нового звена?

Чтобы при конструировании многозвенного фильтра можно было соединять полученные звенья со звеньями типа k по принципу согласования характеристических сопротивлений, попытаемся выбрать величины элементов нового звена таким образом, чтобы его характеристическое сопротивление Z_{c2m} (со стороны зажимов 2-2') при любой частоте от 0 до ∞ имело такую же величину, как и характеристическое сопротивление $Z_{c2} = Z_{\Pi}$ звена типа k . Иными словами, исходя из формулы (34), потребуем, чтобы при любой частоте соблюдалось условие

$$\sqrt{\frac{z'_{1m} z_{2m}}{1 + \frac{z_{1m}}{z_{2m}}}} = \sqrt{\frac{z_1 z_2}{1 + \frac{z_1}{z_2}}} . \quad (49)$$

В этом уравнении z_1 и z_2 — сопротивления звена типа k , которые считаем известными величинами; z_{1m} и z_{2m} — неизвестные сопротивления нового звена, кото-

рые предстоит определить. Для определения двух неизвестных необходимо иметь систему из двух уравнений. Второе уравнение получим, сравнивая между собой схемы рис. 18, *a* и *в*. В обеих схемах единственным элементом поперечной ветви является емкость (C'' и C соответственно). В общем случае емкость C'' может быть в m раз больше, чем емкость C :

$$C'' = mC, \quad (50)$$

или, переходя к величинам сопротивлений,

$$z_{2m} = \frac{z_2}{m}. \quad (51)$$

(Увеличение емкости в m раз соответствует уменьшению емкостного сопротивления во столько же раз.)

Равенство (51) можно считать вторым уравнением системы. Подставляя значение z_{2m} из (51) в (49) и решая (49) относительно $1/z_{1m}$, находим:

$$\frac{1}{z_{1m}} = \frac{1}{mz_1} + \frac{1-m^2}{m} \frac{1}{z_2}. \quad (52)$$

Проводимость сопротивления z_{1m} оказалась равной сумме двух слагаемых, каждое из которых в свою очередь можно рассматривать как проводимость некоторого сопротивления. С другой стороны, известно, что при параллельном соединении n сопротивлений проводимость полученного эквивалентного сопротивления равна сумме проводимостей всех n сопротивлений.

Поэтому формула (52) означает, что сопротивление z_{1m} продольной ветви нового звена должно быть равно параллельному соединению сопротивлений

$$mz_1 \text{ и } \frac{m}{1-m^2} z_2,$$

где z_1 и z_2 — сопротивления звена типа k , а m — коэффициент пропорциональности между величинами сопротивлений z_2 и z_{2m} . Итак, задача подбора величин элементов новой схемы, исходя из условия $z_{c2m} = Z_{\Pi}$, допускает не одно, а бесчисленное множество решений, по-

тому что величина m в принципе может быть выбрана произвольно. Схема нового звена в общем виде показана на рис. 18,е. Практически значение m выбирают в пределах

$$0 < m \leq 1. \quad (53)$$

При $m=1$ звено типа m обращается в звено типа k . При $m > 1$ сопротивление $\frac{m}{1-m^2} z_2$ становится отрицательным, и реализовать такое решение не всегда удастся.

Рассмотренное нами новое звено образовано (произведено), исходя из схемы и параметров звена типа k путем включения в схему звена типа k одного нового элемента параллельно имеющемуся в схеме. Поэтому новое звено называется параллельно-производным Г-образным звеном типа m .

Пример 11. Приняв в схеме звена типа k фильтра нижних частот (рис. 18,в) $L=28,1$ мГн и $C=0,0781$ мкФ, определить величины элементов параллельно-производного звена типа m , приняв $m=0,6$.

Решение. Рассматривая схему параллельно-производного звена в общем виде и сравнивая ее со схемами рис. 18,а и в, находим:

а) $j\omega L' = m z_1 = m j\omega L$,
откуда

$$L' = mL = 0,6 \cdot 28,1 = 16,86 \text{ мГн};$$

$$\text{б) } \frac{1}{j\omega C'} = \frac{m}{1-m^2} z_2 = \frac{m}{1-m^2} \frac{1}{j\omega C},$$

откуда

$$C' = \frac{1-m^2}{m} C = \frac{1-0,6^2}{0,6} 0,0781 = 0,0828 \text{ мкФ};$$

$$\text{в) } \frac{1}{j\omega C''} = \frac{Z_2}{m} = \frac{1}{m j\omega C},$$

откуда

$$C'' = mC = 0,6 \cdot 0,0781 = 0,04686 \text{ мкФ}.$$

Практически переход от величин элементов звена типа k к величинам элементов звена типа m осуществляется с помощью таблиц, подобных приведенной на рис. 28.

Подставляя значения сопротивлений z_{1m} и z_{2m} из (51) и (52) в формулу для определения характеристической постоянной передачи Г-образного звена, после не-

сложных преобразований можно получить для звена типа m фильтра нижних частот формулу

$$\operatorname{th} g_{\Gamma} = \sqrt{\frac{\frac{z_{1m}}{z_{2m}}}{1 + \frac{z_{1m}}{z_{2m}}}} = m \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}}. \quad (54)$$

Как и в случае звена типа k , в диапазоне частот $0 \leq \eta \leq 1$ $\operatorname{th} g_{\Gamma}$ является мнимой величиной. Характеристическое затухание звена в этом диапазоне равно нулю, а характеристическая фазовая постоянная изменяется от нуля до $\pi/2$ рад и может быть определена по формуле

$$\operatorname{tg} b_{\Gamma} = m \frac{\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}}. \quad (55)$$

В полосе задерживания величина $\operatorname{th} g_{\Gamma}$ является действительной и монотонно убывает от величины $\operatorname{th} g_{\Gamma} = \infty$ при $\eta = 1$ до величины $\operatorname{th} g_{\Gamma} = m$ при $\eta = \infty$ (см. рис. 19, а). На некоторой конечной частоте в полосе задерживания величина $\operatorname{th} g_{\Gamma}$ должна стать равной единице, если величина m выбрана нами менее единицы.

Обозначим нормированную частоту, при которой $\operatorname{th} g_{\Gamma}$ становится равным единице, символом η_{∞} :

$$\operatorname{th} g_{\Gamma} = 1 = m \frac{\eta_{\infty}}{\sqrt{\eta_{\infty}^2 - 1}}. \quad (56)$$

Вспоминая свойства функции $\operatorname{th} g_{\Gamma}$, приходим к выводу, что при $\eta = \eta_{\infty}$ характеристическое затухание звена становится равным бесконечно большой величине. Иными словами, на этой частоте располагается полюс затухания звена.

Итак, в полосе задерживания $\operatorname{th} g_{\Gamma} > 1$ при $\eta < \eta_{\infty}$ и $\operatorname{th} g_{\Gamma} < 1$ при $\eta > \eta_{\infty}$. Поэтому расчетные формулы для определения величины g_{Γ} в полосе задерживания имеют вид:

а) при $1 < \eta < \eta_{\infty}$

$$b_{\Gamma} = \pi/2, \quad (57)$$

$$\operatorname{cth} a_{\Gamma} = m \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}}; \quad (58)$$

б) при $\eta_{\infty} < \eta \leq \infty$

$$b_{\Gamma} = 0, \quad (59)$$

$$\operatorname{th} a_{\Gamma} = m \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}}. \quad (60)$$

Зависимости $\operatorname{th} g_{\Gamma} = \varphi_1(\eta)$, $b_{\Gamma} = \varphi_2(\eta)$, $a_{\Gamma} = \varphi_3(\eta)$ показаны на рис. 19.

Из формул (58), (60) и рис. 19 следует, что при изменении η от единицы до η_{∞} характеристическое затухание звена увеличивается от нуля до бесконечности. При дальнейшем увеличении η затухание монотонно убывает, стремясь к величине

$$a_{\Gamma} = \operatorname{Arth} m.$$

Причина скачкообразного изменения фазовой постоянной b на величину $\pi/2$ рад при $\eta = \eta_{\infty}$ заключается в том, что на этой частоте меняется знак сопротивления z_{1m} . Это приводит к изменению фазы тока в сопротивлении согласованной нагрузки.

Численное значение частоты η_{∞} зависит от величин элементов L' и C' (рис. 18, а) и, следовательно, от выбора параметра m . Как же влияет величина m на положение полюса затухания? Решая (56) относительно η_{∞} , находим:

$$\eta_{\infty} = \frac{1}{\sqrt{1 - m^2}}. \quad (61)$$

Итак, чем меньше величина m , тем меньше отличается от единицы величина η_{∞} и тем ближе к предельной

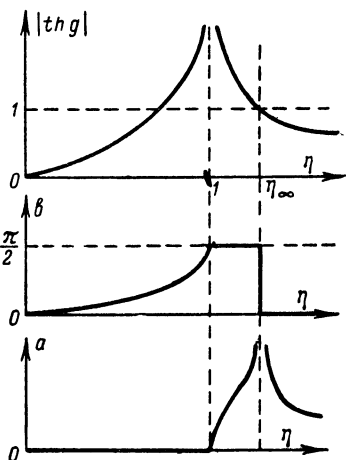


Рис. 19. Зависимости $|\operatorname{th} g| = \varphi_1(\eta)$; $a = \varphi_2(\eta)$; $b = \varphi_3(\eta)$ для Γ -образного звена типа m при $m < 1$.

частоте f_c расположен полюс затухания звена (рис. 20). При $m=1$ (звено типа k) полюс затухания перемещается в бесконечно удаленную точку оси частот.

Подобно тому как частотная зависимость характеристического затухания параллельно-производного звена определяется величиной параметра m , так и частотная зависимость характеристического сопротивления звена

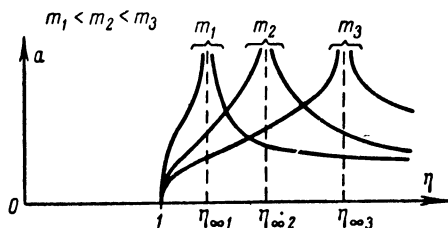


Рис. 20. Влияние параметра m на положение полюса затухания звена.

со стороны зажимов $1-1'$ $Z_{Tm}=\varphi(\eta)$ оказывается функцией параметра m :

$$Z_{Tm} = R \frac{\sqrt{1-\gamma_1^2}}{[1 + (1-m^2)\eta^2]}. \quad (62)$$

Графики зависимостей $Z_{Tm}=\varphi(\eta)$ для четырех значений m показаны на рис. 21,а. В полосе пропускания сопротивление Z_{Tm} является действительной положительной величиной. Графики, соответствующие значениям $m < 1$, располагаются в полосе пропускания выше графика $Z_T=\varphi_1(\eta)$. При значениях $m > 0,707$ кривая $Z_{Tm}=\varphi(\eta)$ не имеет максимума: ни одна точка кривой не лежит выше значения $Z_{Tm}=R$. При значениях m меньших, чем $0,707$, на кривой $Z_{Tm}=\varphi(\eta)$ появляется максимум. Максимальное значение Z_{Tm} увеличивается по мере уменьшения параметра m и одновременно смещается вправо по оси частот, ближе к предельной частоте.

В диапазоне частот от $\eta=1$ до $\eta=\eta_\infty$ характеристическое сопротивление Z_{Tm} имеет индуктивный характер и увеличивается от нуля до бесконечности (рис. 21,б). После резонанса в продольной ветви (при $\eta=\eta_\infty$) харак-

теристическое сопротивление меняет знак — становится емкостным, а при дальнейшем повышении частоты уменьшается (по модулю) от бесконечности до нуля. Напомним, что значения η_∞ у звеньев с разными m будут различными.

О свойствах характеристического сопротивления Z_{Tm} необходимо помнить при составлении схемы многозвенного фильтра из параллельно-производных Г-образных звеньев.

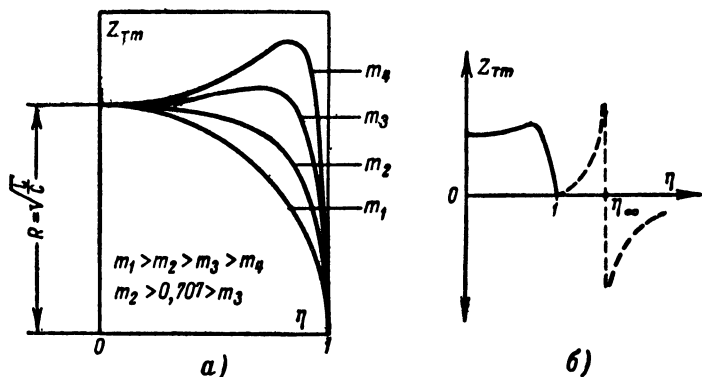


Рис. 21. Влияние параметра m на частотную зависимость характеристического сопротивления в полосе пропускания (а) и частотная зависимость сопротивления Z_{Tm} в полосе пропускания и задерживания (б).

Пример 12. Все Г-образные звенья, изображенные на рис. 22, имеют одинаковую предельную частоту f_c и номинальное значение характеристического сопротивления R . Под каждым звеном указана величина параметра m . Определить, в каком из случаев звенья соединены по принципу согласования характеристических сопротивлений.

Решение. По принципу согласования характеристических сопротивлений соединены звенья в схемах рис. 22, а, в, г и д.

В схемах рис. 22, б и е соединение по принципу согласования характеристических сопротивлений не имеет места.

Соединив два одинаковых Г-образных параллельно-производных звена фильтра нижних частот в точках 2-2' (по принципу согласования характеристических сопротивлений), как показано на рис. 22, в, получим симметричное Т-образное параллельно-производное звено фильтра нижних частот с характеристическим сопротивлением типа Z_{Tm} . Обе емкости mC (рис. 22, в) заменяют-

ся при образовании Т-образного звена одной эквивалентной, равной $2mC$ (рис. 23,а).

Соединив два одинаковых параллельно-производных звена в точках 1-1' (рис. 22,б), получим симметричное

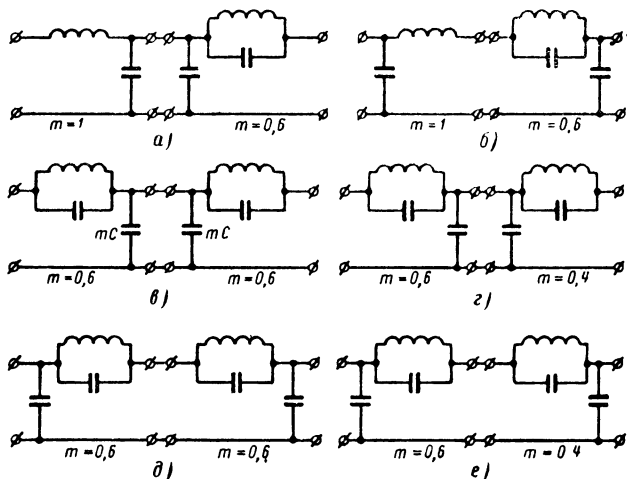


Рис. 22. К примеру 12.

П-образное параллельно-производное звено типа m с характеристическим сопротивлением типа Z_{Π} .

Оба параллельных контура в полученной схеме имеют одинаковую резонансную частоту и могут быть

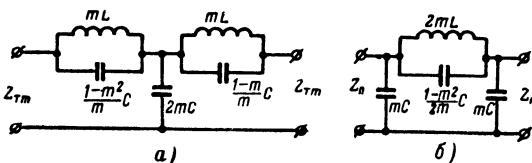


Рис. 23. Т- и П-образное параллельно-производные звенья.

заменены одним эквивалентным параллельным контуром, имеющим такую же резонансную частоту. Величины элементов П-образного звена после приведения обозначены на рис. 23,б.

Характеристическая постоянная передачи Т- и П-образного звеньев равна удвоенной характеристической постоянной передачи Г-образного звена. Расчетные формулы имеют вид:

а) в полосе пропускания

$$\operatorname{tg} \frac{b}{2} = m \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}, \quad (63)$$

$$a=0; \quad (64)$$

б) в полосе задерживания при $1 < \eta < \eta_\infty$

$$b=\pi, \quad (65)$$

$$\operatorname{cth} \frac{a}{2} = m \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2-1}}; \quad (66)$$

в) в полосе задерживания при $\eta_\infty < \eta \leq \infty$

$$b=0, \quad (67)$$

$$\operatorname{th} \frac{a}{2} = m \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2-1}}. \quad (68)$$

Графики частотной зависимости характеристического сопротивления Z_{Tm} для некоторых значений m показаны на рис. 24.

Графики частотной зависимости характеристического затухания Т- и П-образных звеньев для некоторых значений m показаны на рис. 25. Они подтверждают сделанный ранее вывод: чем меньше величина параметра m , тем быстрее нарастает по мере увеличения частоты величина затухания в начале полосы задерживания. Но зато после частоты η_∞ затухание звеньев с малой величиной m резко падает до сравнительно небольшой величины.

Поэтому применяемые на практике фильтры чаще всего состоят из нескольких согласованно соединенных между собой звеньев с разными значениями m . Звенья с малыми m служат для того, чтобы быстрее поднять величину характеристического затухания в полосе задерживания до определенной заданной нормы. А чтобы затухание не падало ниже нормы на более высоких частотах, в схему фильтра вводят звенья с большими зна-

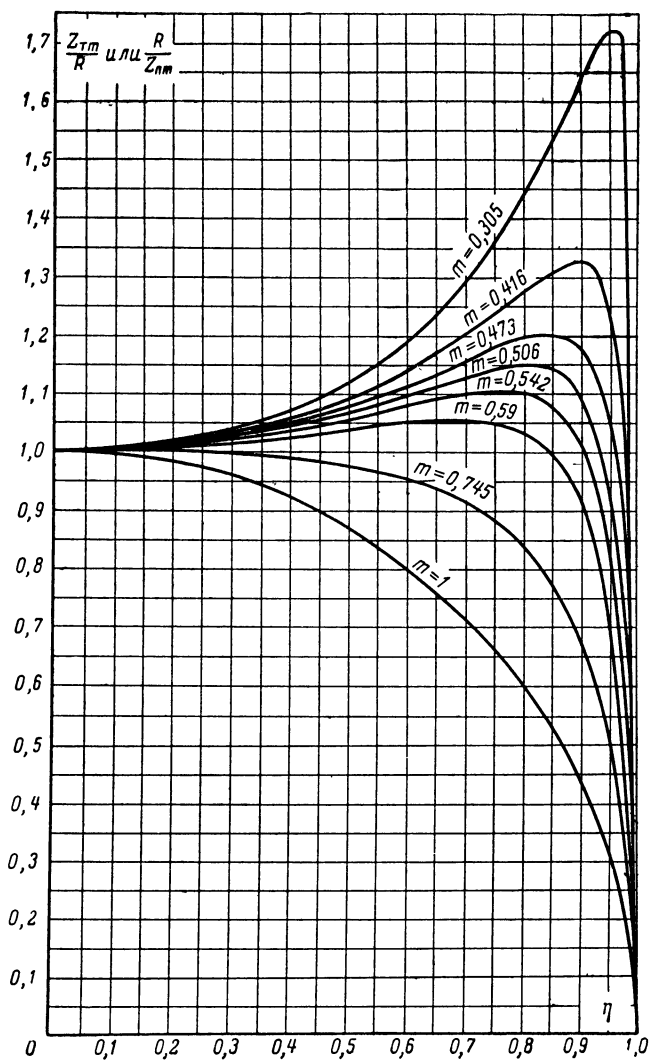


Рис. 24. Частотные зависимости $\frac{Z_{Tm}}{R}$ и $\frac{R}{Z_{nm}}$ в полосе пропускания.

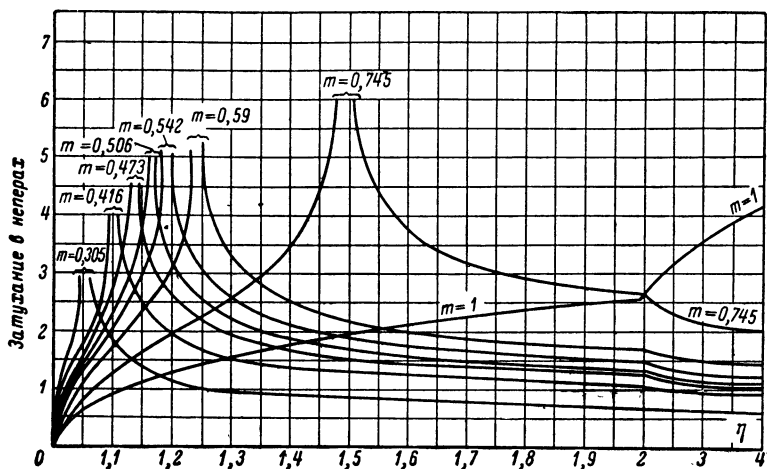


Рис. 25. Частотные зависимости характеристического затухания звеньев типа m .

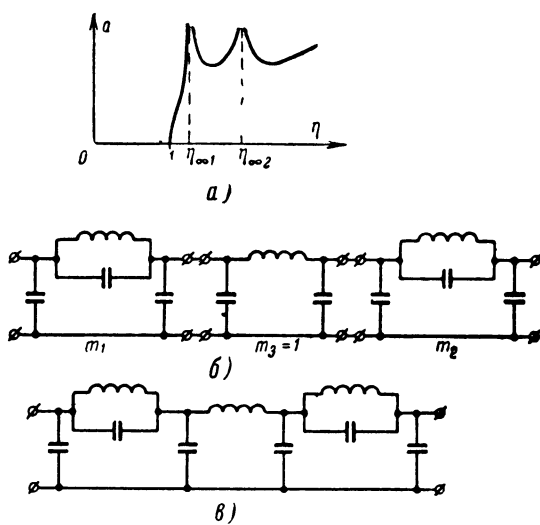


Рис. 26. К примеру 13.

чениями m и звенья типа k . Определение значений параметра m или, иначе, определение частот, на которых лежат полюсы затухания многозвенного фильтра, является одним из важных этапов расчета фильтра.

Пример 13. На рис. 26,а показана частотная зависимость характеристического затухания фильтра нижних частот. Начертить схему фильтра, если известно, что фильтр состоит из трех П-образных звеньев.

Решение. Фильтр имеет три полюса затухания: при $\eta = \eta_{\infty 1}$, $\eta_{\infty 2}$ и ∞ . Такая частотная зависимость характеристического затухания может быть получена при цепочечном соединении (по принципу согласования характеристических сопротивлений) трех звеньев: двух звеньев типа m с разными значениями m и одного звена типа k , как показано на рис. 26,б.

Схема после приведения показана на рис. 26,в.

12. Последовательно-производное звено типа m

Схема параллельно-производного звена типа m была разработана, чтобы обеспечить большее, чем у звена типа k , затухание в начале полосы задерживания. Увеличение затухания было достигнуто благодаря включению параллельного колебательного контура в продольную ветвь схемы. По мере приближения частоты к резонансной сопротивление параллельного контура возрастает, что приводит к уменьшению напряжения на выходных зажимах фильтра.

Эту же задачу (обеспечить большую, чем у звена типа k , крутизну кривой $a = \varphi(\eta)$ в начале полосы задерживания) можно решить еще одним способом, который становится ясным из рис. 27,а. Здесь параллельно сопротивлению нагрузки $Z_n = Z_{c2}$ подключен последовательный колебательный контур. Элементы L'' и C'' этого контура выбраны таким образом, что резонансная частота контура $\omega_0 = 1/\sqrt{L''C''}$ попадает в начало полосы задерживания. По мере приближения частоты к резонансной сопротивление последовательного контура уменьшается, а шунтирующее действие контура по отношению к сопротивлению нагрузки Z_n возрастает. При резонансной частоте сопротивление последовательного контура обращается в нуль. Контур как бы замыкает накоротко зажимы 2-2', в результате чего при любой конечной величине напряжения U_1 напряжение U_2 будет равно нулю, а характеристическое затухание четырехполюсника равно бесконечно большой величине.

Проверка изложенной идеи графическим методом подтверждает, что рассматриваемая схема (рис. 27,а) действительно является фильтром нижних частот и имеет полюс характеристического затухания при $\omega = \omega_0$. Поясним, что график частотной зависимости сопротивления z_2 на рис. 27,б соответствует аналитическому выражению

$$z_2 = j\omega L'' + \frac{1}{j\omega C''}.$$

При изменении частоты от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_0$ сопротивление имеет емкостной характер и уменьшается по модулю от ∞ до 0. При переходе через резонансную частоту

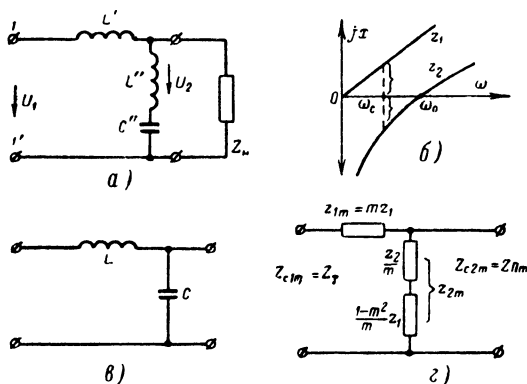


Рис. 27. Образование последовательно-производного звена типа m .

ту сопротивление меняет знак и начинает возрастать, имея теперь индуктивный характер.

Чтобы такое звено можно было соединять со звеньями типа k по принципу согласования характеристических сопротивлений, попытаемся выбрать величины элементов звена таким образом, чтобы его характеристическое сопротивление со стороны зажимов $1-1'$ Z_{clm} при любой частоте было равно характеристическому сопротивлению Z_T звена типа k .

Если обозначить в общем виде сопротивления звена типа k символами z_1 и z_2 , а сопротивления нового зве-

на — символами z_{1m} и z_{2m} , то условие $Z_{c1m} = Z_T$ можно с учетом формулы (33) записать следующим образом:

$$\sqrt{z_{1m} z_{2m}} \sqrt{1 + \frac{z_{1m}}{z_{2m}}} = \sqrt{z_1 z_2} \sqrt{1 + \frac{z_1}{z_2}}. \quad (69)$$

Величины z_1 и z_2 в этом уравнении считаем известными, а величины z_{1m} и z_{2m} — неизвестными.

Второе уравнение системы получим, сравнивая принципиальную схему звена типа k и нового звена (рис. 27, *в* и *а*).

Соответственно имеем:

$$z_1 = j\omega L$$

и

$$z_{1m} = j\omega L'.$$

Величина индуктивности L' в общем случае может отличаться в m раз от величины индуктивности L :

$$L' = mL.$$

Поэтому при любой частоте

$$z_{1m} = mz_1. \quad (70)$$

Решая систему уравнений (69) и (70) относительно z_{2m} , находим:

$$z_{2m} = \frac{z_2}{m} + \frac{1-m^2}{m} z_1. \quad (71)$$

Таким образом, сопротивление z_{2m} новой схемы должно состоять из последовательно соединенных сопротивлений $\frac{z_2}{m}$ и $\frac{1-m^2}{m} z_1$, где z_1 и z_2 — сопротивления схемы звена типа k . При выполнении этого условия характеристические сопротивления звеньев рис. 27, *а* и *в* со стороны зажимов $I-I'$ на любой частоте будут равны друг другу.

Новое звено образовано из звена типа k путем включения дополнительного элемента последовательно с сопротивлением z_2 звена типа k и поэтому называется последовательно-производным звеном типа m .

Из (71) следует, что преобразование звена типа k в последовательно-производное звено типа m всегда осуществимо при $m < 1$. Как и в случае параллельно-произ-

водного звена, при $m=1$ последовательно-производное звено обращается в звено типа k .

Переход от величин элементов звена типа k к величинам элементов последовательно-производного звена типа m удобно осуществлять с помощью рис. 28.

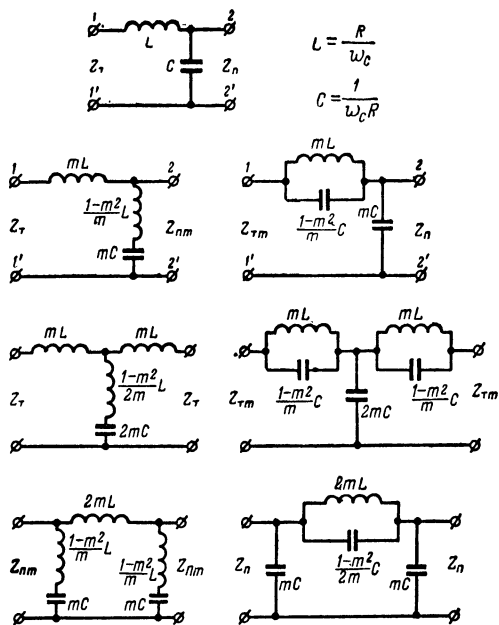


Рис. 28. Схемы звеньев фильтров нижних частот.

Пример 14. Определить величины элементов последовательно-производного Г-образного звена типа m (рис. 27,а) при $m=0,6$, если это звено должно иметь такую же предельную частоту и номинальное значение характеристического сопротивления, как и Г-образное звено типа k фильтра нижних частот с величинами элементов $L=28,1$ мГн, $C=0,0781$ мкФ.

Решение. С помощью рис. 28 находим:

$$L' = mL = 0,6 \cdot 28,1 = 16,86 \text{ мГн};$$

$$C'' = mC = 0,6 \cdot 0,0781 = 0,0496 \text{ мкФ};$$

$$L'' = \frac{1-m^2}{m} L = \frac{1-0,6^2}{0,6} 28,1 = 29,8 \text{ мГн}.$$

Подставляя значения z_{1m} и z_{2m} из (70) и (71) в формулу для определения характеристической постоянной

передачи Г-образного звена, после несложных преобразований можно получить:

$$\operatorname{th} g_{\Gamma} = m \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}}. \quad (72)$$

Эта формула ничем не отличается от формулы (54) для определения характеристической постоянной параллельно-производного звена. Все, что было сказано ранее о величине g параллельно-производного звена, относится также и к величине g последовательно-производного звена.

Характеристическое сопротивление $Z_{\Pi m}$ последовательно-производного звена фильтра нижних частот определяется формулой

$$Z_{\Pi m} = \frac{R[1 - (1 - m^2)\eta^2]}{\sqrt{1 - \eta^2}}. \quad (73)$$

Величина $Z_{\Pi m}$ зависит от нормированной частоты η и параметра m .

В полосе пропускания сопротивление $Z_{\Pi m}$ является действительной величиной. Оно монотонно возрастает от значения $Z_{\Pi m} = R$ при $\eta = 0$ до значения $Z_{\Pi m} = \infty$ при $\eta = 1$ при условии, что величина параметра m лежит в пределах $1 \geq m \geq 0,707$. При $m < 0,707$ на кривой $Z_{\Pi m} = \varphi(\eta)$ появляется впадина, кривая приобретает минимум. При уменьшении параметра m точка минимума смещается по оси частот вправо, а абсолютное значение $Z_{\Pi m}$ в точке минимума уменьшается (рис. 29,а). График зависимости $Z_{\Pi m} = \varphi(\eta)$ для полосы задерживания показан на рис. 29,б. В диапазоне частот $1 < \eta < \eta_{\infty}$ сопротивление $Z_{\Pi m}$ имеет емкостной характер, а при $\eta > \eta_{\infty}$ — индуктивный.

Сравнивая формулы (62) и (73), убеждаемся, что при одинаковом выбранном значении параметра m величины $Z_{\Pi m}$ и $Z_{\Gamma m}$ являются взаимно обратными относительно параметра R^2 :

$$Z_{\Gamma m} Z_{\Pi m} = R^2 \quad (74)$$

или

$$\frac{Z_{\Gamma m}}{R} = \frac{R}{Z_{\Pi m}}. \quad (75)$$

Поэтому если величина Z_{Tm} превышает на некоторой частоте η величину R , например, в n раз, то величина $Z_{\Pi m}$ будет на этой же частоте в n раз меньше, чем R .

Соединив два одинаковых последовательно-производных Г-образных звена зажимами 2-2' (рис. 28), получим симметричное Т-образное последовательно-производное звено типа m с характеристическим сопротивлением ти-

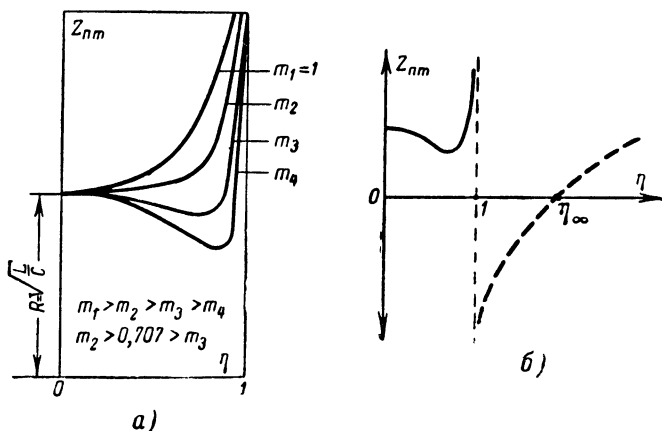


Рис. 29. Частотная зависимость характеристического сопротивления $Z_{\Pi m}$.

па Z_T и с характеристической постоянной передачи $g_T = 2g_\Gamma = g$. Заметим, что при параллельном соединении двух одинаковых последовательных контуров их можно заменить одним эквивалентным последовательным контуром, имеющим в 2 раза меньшую индуктивность и в 2 раза большую емкость, чем исходные контуры.

Соединив те же Г-образные звенья зажимами 1-1', получим симметричное последовательно-производное П-образное звено типа m с характеристическим сопротивлением типа $Z_{\Pi m}$ и характеристической постоянной передачи $g_\Pi = 2g_\Gamma = g$.

Таким образом, характеристическая постоянная Т- или П-образного последовательно-производного звена имеет такую же величину и может быть вычислена по

тем же формулам, что и характеристическая постоянная передачи параллельно-производного Т- или П-образного звена.

Соединяя последовательно-производные звенья по принципу согласования характеристических сопротивлений, можно получить схему многозвенного фильтра с требуемой частотной зависимостью характеристического затухания.

Пример 15. Решить пример 13, полагая, что фильтр образован путем цепочечного соединения последовательно-производных звеньев.

Решение. У П-образных последовательно-производных звеньев

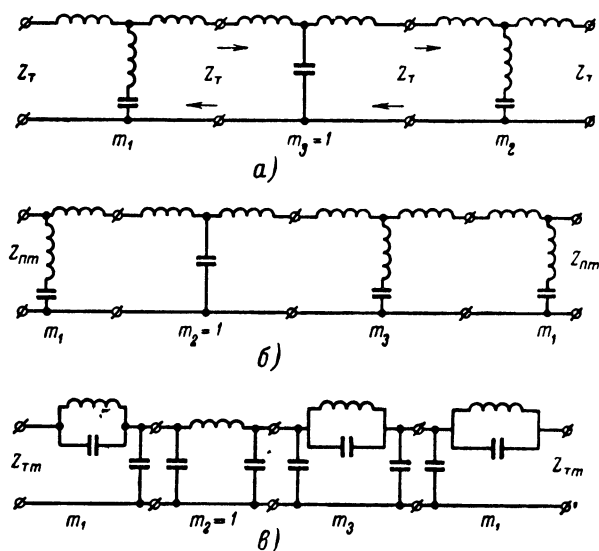


Рис. 30. К примерам 15 и 16.

ев с разными значениями m частотные зависимости $Z_{Пm} = \varphi(\eta)$ будут различными, и соединять такие звенья по принципу согласования характеристических сопротивлений нельзя.

Схему фильтра можно составить только из последовательно-производных Т-образных звеньев, как показано, например, на рис. 30, а.

Схемы фильтров в примерах 13 и 15 были составлены из звеньев с разными значениями m и имели соответственно характеристические сопротивления типов $Z_{П}$ и $Z_{Т}$.

Однако часто бывает необходимо получить частотную зависимость характеристического сопротивления фильтра не типа Z_{Π} или Z_T , а типа $Z_{\Pi m}$ или Z_{Tm} . В таких случаях одно из Т- или П-образных звеньев разбивают на два Г-образных звена и включают эти звенья на входе и выходе фильтра, соблюдая принцип согласования характеристических сопротивлений. Такое преобразование схемы фильтра совершенно не влияет на величину и частотную зависимость характеристического затухания фильтра. Изменяется только частотная зависимость характеристического сопротивления фильтра.

Очень важно усвоить, что при согласованном соединении друг с другом любого количества звеньев характеристические сопротивления полученного фильтра будут равны соответствующим характеристическим сопротивлениям звеньев, включенных на входе и выходе, и не будут зависеть от общего числа звеньев в схеме.

Пример 16. Фильтр нижних частот состоит из трех Т- или П-образных звеньев со значениями $m=m_1$, 1 и m_3 . Составить две такие схемы фильтра, чтобы в одной из них характеристические сопротивления Z_{c1} и Z_{c2} соответствовали типу $Z_{\Pi m}$ (при $m=m_1$), а в другой — типу Z_{Tm} (при $m=m_3$).

Решение. Получить характеристическое сопротивление фильтра равным $Z_{\Pi m}$ можно, включив на входе и выходе его последовательно-производные Г-образные звенья (рис. 30,б). Чтобы остальные звенья были соединены с выбранными Г-образными по принципу согласования характеристических сопротивлений, они должны иметь характеристические сопротивления типа Z_T . Схема соединения звеньев показана на рис. 30,б.

Чтобы получить характеристическое сопротивление фильтра равным Z_{Tm} , включим на входе и выходе фильтра параллельно-производные Г-образные звенья типа m . Остальные звенья должны будут иметь при этом характеристическое сопротивление типа Z_{Π} (рис. 30, в).

13. Рабочее затухание фильтра

До сих пор мы рассматривали работу звеньев типов k и m в идеальных условиях: предполагая, что сопротивление нагрузки на любой частоте равно характеристическому ($Z_H=Z_{c2}$) и считая напряжение U_1 на входных зажимах заданной величиной. Но реальные условия работы фильтра существенно отличаются от идеальных. Во-первых, характеристическое сопротивление фильтра при изменении частоты меняется по величине и даже по характеру (может быть как действительной, так и мни-

мой величиной). А сопротивление нагрузки обычно является постоянной действительной величиной. Поэтому на практике рассмотренные нами звенья фильтров могут быть нагружены согласованно всего лишь на одной или на двух частотах рабочего диапазона. Во-вторых, напряжение на входных зажимах фильтра в любой реальной схеме включения создается генератором э. д. с.

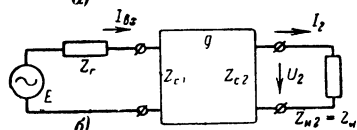
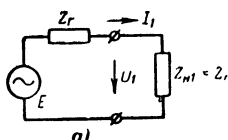


Рис. 31. К понятию о рабочем затухании четырехполюсника.

E , имеющим определенное, не равное нулю внутреннее сопротивление Z_r , как показано на рис. 31,б.

При расчете такой цепи заданной величиной следует считать э. д. с. E . Напряжение на входных зажимах фильтра будет отличаться от э. д. с. на величину падения напряжения на внутреннем сопротивлении генератора и может меняться при изменении частоты даже

в том случае, если э. д. с. E будет оставаться неизменной. В этих условиях характеристическая постоянная передачи не может с достаточной полнотой охарактеризовать процесс передачи энергии через четырехполюсник, и приходится вводить новый расчетный параметр: *рабочую постоянную передачи* четырехполюсника.

Рабочей постоянной передачи четырехполюсника называют величину

$$g_p = \frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2}, \quad (76)$$

где U_1 и I_1 — комплексные амплитуды напряжения и тока, которые генератор, имеющий э. д. с. E и внутреннее сопротивление Z_r , создает в сопротивлении нагрузки, если последнее равно внутреннему сопротивлению генератора и подключено непосредственно к зажимам генератора (рис. 31,а);

U_2 и I_2 — комплексные амплитуды напряжения и тока, которые этот же генератор создает в заданном сопротивлении нагрузки при

условии, что оно подключается к генератору через рассматриваемый четырехполюсник (рис. 31,б).

Итак, при вычислении или при указании величины рабочей постоянной передачи обязательно должны быть указаны вполне определенные величины сопротивлений генератора и нагрузки, а саму величину рабочей постоянной передачи можно рассматривать как результат сравнения напряжений и токов в некоторой условной схеме (рис. 31,а) и в реальной схеме включения четырехполюсника (рис. 31,б).

Подставляя в (76) значения

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_r}, \quad I_2 = \frac{U_2}{Z_n}, \quad U_1 = \frac{E}{2},$$

после несложных преобразований получим:

$$g_p = \ln \frac{E/2}{U_2} + \frac{1}{2} \ln \frac{Z_n}{Z_r} \quad (77)$$

и

$$U_2 = \frac{E}{2} \sqrt{\frac{Z_n}{Z_r}} e^{-g_p}. \quad (78)$$

Последняя формула позволяет несколько иначе, чем это было сделано ранее, пояснить смысл величины g_p .

Рабочая постоянная передачи g_p — это величина, которая с точностью до постоянного множителя $\sqrt{Z_n/Z_r}$ характеризует соотношение между комплексными амплитудами половины э. д. с. генератора и напряжения U_2 на сопротивлении нагрузки в схеме рис. 31,б при заданных Z_r и Z_n .

Рабочая постоянная передачи g_p — величина комплексная:

$$g_p = a_p + jb_p.$$

Ее действительная часть a_p называется рабочим затуханием и характеризует соотношение между модулями соответствующих комплексных величин:

$$a_p = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} \right|$$

и

$$|U_2| = \left| \frac{E}{2} \sqrt{\frac{Z_H}{Z_r}} \right| e^{-a_p}. \quad (79)$$

В частности, при $Z_r = Z_H$ и $a_p = 0$ напряжение по модулю равно половине э. д. с. E .

Увеличение рабочего затухания при заданных неизменных величинах E , Z_r и Z_H свидетельствует об уменьшении напряжения $|U_2|$ на сопротивлении нагрузки четырехполюсника, а уменьшение рабочего затухания — об увеличении напряжения $|U_2|$.

Пример 17. На частоте f_1 рабочее затухание четырехполюсника при некоторых величинах Z_r и Z_H равно a_1 неп. На частоте f_2 рабочее затухание этого же четырехполюсника при прежних значениях E , Z_r и Z_H стало больше на величину Δa неп.

Во сколько раз изменилось напряжение U_2 на выходных зажимах четырехполюсника, если $\Delta a = 0,05$ неп?

Решение. На основании формулы (79) имеем:

$$\begin{aligned} |U'_2| &= \left| \frac{E}{2} \sqrt{\frac{Z_H}{Z_r}} \right| e^{-a_1}; \\ |U''_2| &= \left| \frac{E}{2} \sqrt{\frac{Z_H}{Z_r}} \right| e^{-(a_1 + \Delta a)}; \\ \left| \frac{U'_2}{U''_2} \right| &= e^{\Delta a} = e^{0,05} = 1,05. \end{aligned}$$

Изменению рабочего затухания на величину Δa неп соответствует (при постоянных E , Z_r и Z_H) изменение модуля напряжения U_2 в $e^{\Delta a}$ раз.

Заметим, что при $|\Delta a| \leq 0,2$ справедлива приближенная формула

$$e^{\pm \Delta a} \approx 1 \pm \Delta a. \quad (80)$$

Из курса теории электрической связи известна формула, которая позволяет вычислить величину рабочего затухания по известным характеристическим параметрам четырехполюсника и значениям сопротивлений генератора и нагрузки:

$$\begin{aligned} a_p &= a + \ln \left| \frac{Z_r + Z_{c1}}{2 \sqrt{Z_r Z_{c1}}} \right| + \ln \left| \frac{Z_H + Z_{c2}}{2 \sqrt{Z_H Z_{c2}}} \right| + \\ &+ \ln \left| 1 - \frac{Z_r - Z_{c1}}{Z_r + Z_{c1}} \frac{Z_H - Z_{c2}}{Z_H + Z_{c2}} e^{-2g} \right|, \end{aligned} \quad (81)$$

где $g = a + jb$ — характеристическая постоянная передачи четырехполюсника.

Применим эту формулу к анализу работы фильтра в полосе пропускания, полагая, что потери в элементах фильтра отсутствуют, а нагрузочные сопротивления Z_r и Z_n являются действительными величинами.

При отсутствии потерь в элементах фильтра его характеристическое затухание a (первое слагаемое в правой части формулы 81) равно нулю, и анализ формулы сводится к рассмотрению трех остальных слагаемых. Характеристические сопротивления фильтра Z_{c1} и Z_{c2} в полосе пропускания являются также действительными величинами. Поэтому под знаком логарифма во втором и третьем слагаемых формулы (81) мы имеем отношение среднего арифметического двух действительных величин к среднему геометрическому этих же величин.

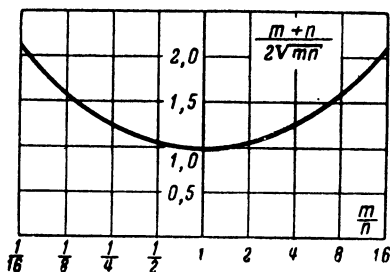


Рис. 32. График зависимости

$$\frac{m+n}{2\sqrt{mn}} = \varphi\left(\frac{m}{n}\right).$$

Характер зависимости величины $\frac{m+n}{2\sqrt{mn}}$ от отношения $\frac{m}{n}$ для случая действительных значений m и n показан на рис. 32. Величина $\frac{m+n}{2\sqrt{mn}}$ имеет минимум, равный единице, при $m=n$ или при $\frac{m}{n}=1$. При $m \neq n$ рассматриваемая величина превышает единицу и будет тем больше, чем больше отличается от 1 отношение m/n .

Учитывая сказанное, приходим к выводу, что второе слагаемое в правой части формулы (81) будет равно нулю при $Z_r = Z_{c1}$. Чем больше отличается Z_{c1} от Z_r в большую или меньшую сторону, тем больше будет величина второго слагаемого. То же самое можно сказать о влиянии Z_{c2} и Z_n на величину третьего слагаемого в правой части формулы (81).

Перейдем к анализу четвертого слагаемого. В полосе пропускания фильтра $a=0$ и $g=jb$. Поэтому множитель

$$e^{-2g} = e^{-j2b} = \cos 2b - j \sin 2b$$

может иметь максимальное и минимальное действительные значения, равные $+1$ и -1 . Соответственно экстремальные значения четвертого слагаемого при действительных (вещественных) величинах характеристических и нагрузочных сопротивлений будут равны:

$$\ln \left| 1 \pm \frac{Z_r - Z_{c1}}{Z_r + Z_{c1}} \frac{Z_n - Z_{c2}}{Z_n + Z_{c2}} \right|.$$

Одно из этих значений всегда положительно, а другое — отрицательно.

С увеличением частоты в полосе пропускания характеристическая фазовая постоянная фильтра b монотонно возрастает. Поэтому величина четвертого слагаемого будет изменяться волнообразно, становясь то положительной, то отрицательной. Однако отрицательное значение третьего слагаемого по модулю всегда бывает не больше, чем сумма двух остальных (положительных) слагаемых.

Сказанное позволяет сделать следующий вывод. Если фильтр включен между постоянными нагрузочными сопротивлениями, то при изменении частоты его рабочее затухание в полосе пропускания не остается постоянной величиной, а меняется по определенному закону (как правило, волнообразно, проходя несколько максимумов и минимумов). Изменение величины рабочего затухания свидетельствует о том, что модуль напряжения U_2 на сопротивлении нагрузки также будет изменяться при изменении частоты, хотя характеристическое затухание фильтра остается в полосе пропускания неизменным, равным нулю. Очевидно, колебания рабочего затухания и напряжения на нагрузке в полосе пропускания обусловлены несоответствием (рассогласованием) между характеристическими и нагрузочными сопротивлениями.

Установим некоторые количественные соотношения, полагая, что фильтр симметричный ($Z_{c1}=Z_{c2}=Z_c$), включен между одинаковыми действительными нагрузочными сопротивлениями ($R_r=R_n$) и что потери в элементах

фильтра отсутствуют. При этих условиях минимальная величина рабочего затухания в полосе пропускания равна нулю; это имеет место на тех частотах, на которых характеристическое сопротивление становится равным нагрузочному.

Частоты максимумов рабочего затухания в полосе пропускания зависят от переменной b и соответствуют значениям

$$b = \frac{\pi}{2} + n\pi,$$

где $n=0, 1, 2, \dots$

Сами же величины максимумов зависят только от соотношения между Z_c и R_H , т. е. от переменной $\delta = Z_c/R_H$.

Подставляя в формулу (81) значение $b = \frac{\pi}{2}$, что соответствует максимальной величине четвертого слагаемого, и решая (81) относительно δ , получим:

$$\delta = \frac{Z_c}{R_H} = e^{a_p} \pm \sqrt{e^{2a_p} - 1}. \quad (82)$$

Формула (82) дает возможность по заданной величине рабочего затухания a_p , обусловленного различием между характеристическими и нагрузочными сопротивлениями, определить предельно допустимые значения δ :

$$\delta_{\text{макс}} = \frac{Z_{c \text{ макс}}}{R_H} = e^{a_p} + \sqrt{e^{2a_p} - 1}, \quad (83)$$

$$\delta_{\text{мин}} = \frac{Z_{c \text{ мин}}}{R_H} = e^{a_p} - \sqrt{e^{2a_p} - 1}. \quad (84)$$

При этом максимальное значение δ всегда превышает 1, а минимальное оказывается меньше 1. Иными словами, характеристическое сопротивление может отличаться от сопротивления нагрузки как в большую, так и в меньшую сторону, а на величине рабочего затухания это скажется одинаково: рабочее затухание в обоих случаях увеличивается.

Как увидим далее, вместо величин $\delta_{\text{мин}}$ и $\delta_{\text{макс}}$ полезно ввести расчетный параметр D , равный их отношению:

$$D = \frac{\delta_{\text{мин}}}{\delta_{\text{макс}}} = \frac{Z_{c \text{ мин}}}{Z_{c \text{ макс}}} = \frac{e^{a_p} - \sqrt{e^{2a_p} - 1}}{e^{a_p} + \sqrt{e^{2a_p} - 1}}. \quad (85)$$

Очевидно, любому заданному значению a_p рабочего затухания фильтра в полосе пропускания соответствует определенная величина расчетного параметра D . Чем больше величина a_p , тем меньше D .

Рассматривая D как независимую переменную, можно утверждать следующее. Для того чтобы в некоторой части полосы пропускания фильтра рабочее затухание a_p не превышало определенной заданной нормы, необходимо, чтобы величина $D = Z_{c \text{ мин}}/Z_{c \text{ макс}}$ в этом диапазоне частот не падала ниже соответствующего минимально допустимого предела, определяемого формулой (85).

Из (83) и (84), перемножив их левые и правые части, получаем важное условие, при котором справедлива формула (85):

$$R_H = \sqrt{Z_{c \text{ мин}} Z_{c \text{ макс}}} \quad (86)$$

Наконец, из (85) и (86) находим:

$$Z_{c \text{ мин}} = R_H \sqrt{D}, \quad (87)$$

$$Z_{c \text{ макс}} = \frac{R_H}{\sqrt{D}}. \quad (88)$$

Пример 18. Найти минимально допустимую величину параметра D , при которой рабочее затухание a_p симметричного фильтра, не имеющего потерь в элементах и включенного между одинаковыми нагрузочными сопротивлениями, в полосе пропускания не будет превышать 0,08 *нп*.

Решение.

$$D = \frac{e^{a_p} - \sqrt{e^{2a_p} - 1}}{e^{a_p} + \sqrt{e^{2a_p} - 1}} = \frac{e^{0,08} - \sqrt{e^{2 \cdot 0,08} - 1}}{e^{0,08} + \sqrt{e^{2 \cdot 0,08} - 1}} \approx 0,446.$$

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

РАСЧЕТ ФИЛЬТРОВ НИЖНИХ ЧАСТОТ

14. Способы задания требований к фильтру

Электрические частотные фильтры включаются, как правило, между действительными нагрузочными сопротивлениями R_r и R_n , величина которых практически не зависит от частоты. А характеристические сопротивления фильтра зависят от частоты. Поэтому согласование нагрузочных сопротивлений с характеристическими может быть обеспечено только на одной или двух частотах рабочего диапазона. Учитывая это, при задании требований к фильтру указывают не величину характеристического затухания, а величину требуемого рабочего затухания фильтра.

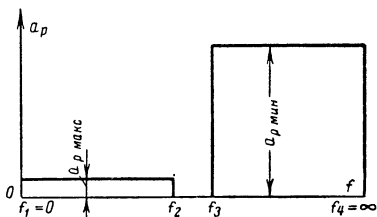


Рис. 33. Деление оси частот при задании требований к фильтру.

Всю ось частот делят не на два участка — полосу пропускания и полосу задерживания, а на три участка: полосу эффективно пропускаемых частот $f_1—f_2$, полосу эффективно задерживаемых частот $f_3—f_4$ и расположенную между ними переходную полосу частот $f_2—f_3$ (рис. 33).

Полосой эффективно пропускаемых частот (ПЭПЧ) называется область частот, в пределах которой рабочее затухание фильтра не должно превышать заданной максимально допустимой величины $a_{p, макс}$. (Обычно $a_{p, макс}$ составляет несколько сотых или десятых долей непера.)

Полосой эффективно задерживаемых частот (ПЭЗЧ) называется область частот, в пределах которой рабочее затухание фильтра не должно падать ниже некоторой минимально допустимой величины $a_{p, \text{мин}}$. (Обычно $a_{p, \text{мин}}$ составляет несколько перер.) Иногда для разных участков полосы эффективно задерживаемых частот задают разную норму минимально допустимого затухания $a_{p, \text{мин}}$.

В переходной полосе частот, как правило, никаких требований к величине затухания фильтра не предъявляется.

Вместо величины рабочего затухания $a_{p, \text{макс}}$ для полосы эффективно пропускаемых частот может быть задана величина затухания эха или величина максимально допустимого отклонения характеристического сопротивления от сопротивления нагрузки. Эти случаи рассмотрены в § 16 и 17.

Требования, предъявляемые к фильтру в полосе эффективно пропускаемых частот, выполняются при расчете путем выбора характеристических сопротивлений Z_{c1} и Z_{c2} фильтра.

Требования, предъявляемые к фильтру в полосе эффективно задерживаемых частот, выполняются путем выбора общего числа и типа звеньев, образующих схему фильтра.

15. Выбор характеристических сопротивлений фильтра

Если схема фильтра составлена из звеньев, соединенных друг с другом по принципу согласования характеристических сопротивлений и не имеющих потерь в элементах, то характеристическое (собственное) затухание фильтра в полосе пропускания всегда равно нулю независимо от числа соединенных звеньев.

Анализ формулы (81) показывает, что при заданных R_r и R_n и при $a=0$ рабочее затухание зависит от величин Z_{c1} , Z_{c2} и b .

Приступая к расчету, мы не знаем, из скольких и каких именно звеньев будет состоять схема фильтра, т. е. ничего не знаем о частотной зависимости фазовой постоянной b . Поэтому, ориентируясь на самый неблагоприятный вариант, можно предположить, что характе-

ристическая фазовая постоянная на верхней границе полосы эффективно пропускаемых частот становится равной

$$b = \frac{\pi}{2} + n\pi,$$

что соответствует максимальной величине рабочего затухания в полосе пропускания.

Этот случай был рассмотрен в § 13, где было установлено, что рабочее затухание, обусловленное рассогласованием, не превысит заданной нормы в том диапазоне частот, в котором величина D не падает ниже соответствующего минимально допустимого значения. Следовательно, задача расчета сводится к выбору такой частотной зависимости характеристического сопротивления, которая удовлетворяла бы поставленным условиям.

Выбрать характеристическое сопротивление — значит определить его номинальное значение R , предельную частоту f_c и коэффициент m . При заданном количестве и типе звеньев схема фильтра содержит наименьшее число элементов, если фильтр имеет характеристические сопротивления Z_T или Z_{II} , т. е. при $m=1$. С этого случая и начнем анализ.

Можно ли выбрать предельную частоту f_c фильтра равной верхней границе полосы эффективно пропускаемых частот f_2 ? Если поступить таким образом, то по мере приближения частоты f к предельной f_c рассогласование между характеристическими и нагрузочными сопротивлениями фильтра будет непрерывно и неограниченно возрастать, а это приведет к соответствующему увеличению рабочего затухания. Выход состоит в том, что предельную частоту f_c выбирают выше, чем верхняя граница полосы эффективно пропускаемых частот ($f_c > f_2$), с таким расчетом, чтобы в полосе частот f_1 — f_2 рассогласование не превышало допустимой величины. В частности, при характеристическом сопротивлении типа Z_T его максимальное значение в полосе пропускания равно:

$$Z_{c \text{ макс}} = R. \quad (89)$$

Это равенство имеет место на нижней границе полосы эффективно пропускаемых частот, при $\eta = \eta_1 = 0$ (рис. 34,а).

При увеличении частоты величина Z_T убывает и на верхней границе полосы эффективно пропускаемых частот при $\eta = \eta_2$ достигает минимально допустимого значения

$$Z_{c \text{ мин}} = R \sqrt{1 - \eta_2^2}. \quad (90)$$

Из (89) и (90)

$$\frac{Z_{c \text{ мин}}}{Z_{c \text{ макс}}} = D = \sqrt{1 - \eta_2^2}, \quad (91)$$

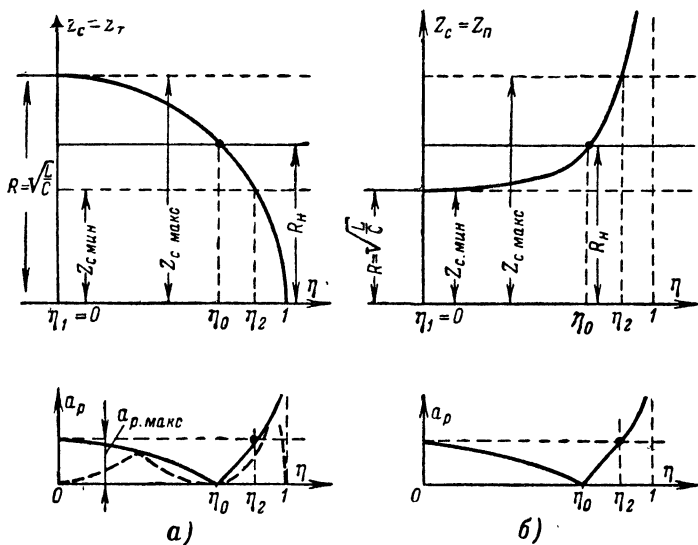


Рис. 34. К расчету номинального значения характеристических сопротивлений типа Z_T и Z_P .

откуда, при известном D , можно найти η_2 :

$$\eta_2 = \sqrt{1 - D^2}. \quad (92)$$

Учитывая, что

$$\eta_2 = \frac{f_2}{f_c},$$

получим искомое значение предельной частоты:

$$f_c = \frac{f_2}{\eta_2}. \quad (93)$$

При таком выборе предельной частоты f_c часть «классической» полосы пропускания от $\eta = \eta_2$ до $\eta = 1$ попадает в переходную полосу частот, а полосой эффективно пропускаемых частот является часть «классической» полосы пропускания от $\eta = 0$ до $\eta = \eta_2$. Поэтому величину η_2 иногда называют коэффициентом использования полосы пропускания.

В случае характеристического сопротивления типа Z_Π при $\eta = 0$ лежит не максимальное, а минимальное значение характеристического сопротивления в полосе пропускания:

$$Z_{c \text{ мин}} = R. \quad (94)$$

С ростом частоты сопротивление Z_Π увеличивается и достигает своего максимально допустимого значения при $\eta = \eta_2$:

$$Z_{c \text{ макс}} = \frac{R}{\sqrt{1 - \eta_2^2}}. \quad (95)$$

Из формул (94) и (95)

$$\frac{Z_{c \text{ мин}}}{Z_{c \text{ макс}}} = D = \sqrt{1 - \eta_2^2}.$$

Полученная формула не отличается от выведенной ранее (91) для сопротивления типа Z_T . Следовательно, в случае характеристического сопротивления типа Z_Π коэффициент использования полосы пропускания η_2 и предельная частота f_c определяются по тем же формулам, что и в случае характеристического сопротивления типа Z_T .

В обоих случаях на некоторой частоте η_0 (см. рис. 34,а и б) характеристическое сопротивление фильтра становится равным нагрузочному. Рабочее затухание, обусловленное рассогласованием, на этой частоте равно нулю. По мере удаления от частоты η_0 к границам полосы эффективно пропускаемых частот максимально возможная величина рабочего затухания увеличивается, как показано на рис. 34,а и б внизу.

Следует подчеркнуть, что на графиках в нижней части рисунка показан характер изменения именно максимально возможной величины затухания, без учета вол-

нообразных колебаний, обусловленных частотной зависимостью величины b фильтра. В действительности, за счет изменения фазовой постоянной b , особенно при большом количестве звеньев, рабочее затухание будет изменяться по более сложной кривой (см., например, штриховую линию на рис. 34,а внизу), для которой график максимально возможной величины рабочего затухания является верхней огибающей.

Характеристическое сопротивление, которое может быть согласовано с нагрузочным только на одной частоте, называется характеристическим сопротивлением первого класса. Из рис. 34 следует, что сопротивления Z_T и Z_{Π} представляют собой сопротивления первого класса. Что же касается величины R , то сравнивая формулы (88) и (89), приходим к выводу, что в случае характеристического сопротивления типа Z_T его номинальное значение равно:

$$R = \frac{R_{\Pi}}{\sqrt{D}}. \quad (96)$$

На основании (87) и (94) заключаем, что в случае характеристического сопротивления типа Z_{Π}

$$R = R_{\Pi} \sqrt{D}. \quad (97)$$

Определив по формуле (93) предельную частоту f_c , следует сравнить ее с заданной нижней границей полосы эффективно задерживаемых частот f_3 . Если окажется, что f_c превышает f_3 , то выполнить фильтр с характеристическим сопротивлением типа Z_T или Z_{Π} нельзя, и следует попытаться выполнить фильтр с характеристическим сопротивлением второго класса (см. ниже). То же самое надо сделать, если величина f_c не превышая f_3 , мало отличается от последней, т. е. при

$$\eta_3 = \frac{f_3}{f_c} \leq (1,08 - 1,10).$$

Пример 19. Рассчитать частотный электрический фильтр без потерь в элементах, если известно, что в диапазоне частот 0—3 400 гц (ПЭПЧ) рабочее затухание фильтра $a_{p, \max}$, обусловленное рассогласованием между характеристическими и нагрузочными сопротивлениями, не должно превышать 0,08 неп. В диапазоне частот 4 120—150 000 гц (ПЭЗЧ) рабочее затухание фильтра должно быть не менее величины $a_{p, \min} = 2,8$ неп. $R_{\Pi} = R_T = 600$ ом.

Решение. 1. В соответствии с рис. 33 обозначаем $f_1=0$ гц, $f_2=3\,400$ гц, $f_3=4\,120$ гц, $f_4=150\,000$ гц.

2. По формуле (85) определяем параметр D (см. пример 18):

$$D=0,446.$$

3. Проверяем, можно ли выполнить фильтр с характеристическим сопротивлением первого класса:

$$\eta_2 = \sqrt{1-D^2} = \sqrt{1-0,446^2} \approx 0,89;$$

$$f_c = \frac{f_2}{\eta_2} = \frac{3\,400}{0,89} = 3\,780 \text{ гц};$$

$$\eta_3 = \frac{f_3}{f_c} = \frac{4\,120}{3\,780} = 1,09 > 1,08.$$

Таким образом, фильтр можно выполнить с характеристическим сопротивлением первого класса.

Продолжение расчета см. в примере 20.

Характеристическим сопротивлением второго класса называется такое сопротивление, которое может стать равным нагрузочному не на одной, а на двух частотах рабочего диапазона.

Рассматривая рис. 35,а и б, убеждаемся, что характеристические сопротивления Z_{Tm} и $Z_{Пm}$ при $m < 0,707$ являются характеристическими сопротивлениями второго класса.

В случае характеристического сопротивления Z_{Tm} максимальное значение последнего в полосе пропускания лежит при некоторой частоте η_m (рис. 35,а). Анализируя зависимости $Z_{Tm} = \Phi(\eta)$ для разных значений m , можно убедиться, что при заданном отношении $Z_{с\text{ мин}}/Z_{с\text{ макс}} = D$ наибольший коэффициент использования полосы пропускания будет получен, если принять $Z_{с\text{ мин}} = R$.

Характер частотной зависимости максимально возможной величины рабочего затухания показан для этого случая на рис. 35,а внизу. Точки полного согласования и максимального рассогласования характеристического и нагрузочного сопротивлений в полосе эффективно пропускаемых частот чередуются. Чередуются также и знаки рассогласования ($Z_c > R_n$ или $Z_c < R_n$). На границах полосы рассогласование достигает максимума.

Исследуем количественную сторону явлений. Отношение

$$D = \frac{Z_{c \text{ мин}}}{Z_{c \text{ макс}}} = \frac{R}{Z_{c \text{ макс}}} \quad (98)$$

зависит от величины параметра m .

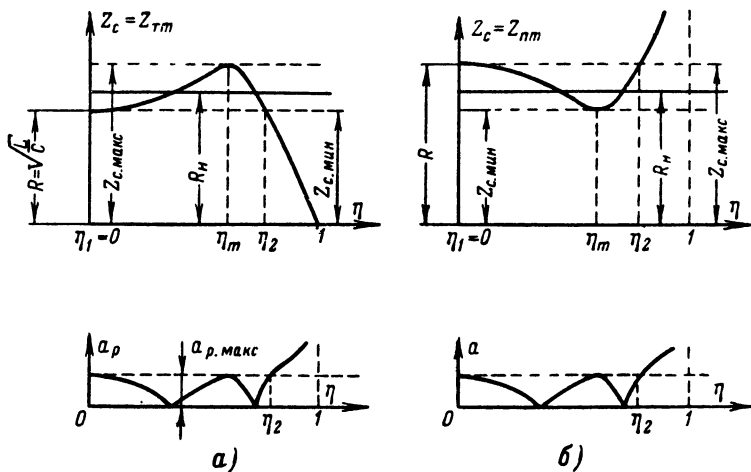


Рис. 35. К расчету номинальных значений характеристических сопротивлений типа Z_{tm} и Z_{nm} .

Взяв производную по η от выражения

$$Z_{tm} = \frac{R \sqrt{1 - \eta^2}}{1 - (1 - m^2) \eta^2} \quad (99)$$

и приравняв ее нулю, находим значение η_m , при котором величина Z_{tm} имеет экстремальное (максимальное) значение при заданном параметре m :

$$\eta_m = \sqrt{\frac{1 - 2m^2}{1 - m^2}}. \quad (100)$$

Подставляя это значение η_m в (99), выразим величину $Z_{tm \text{ макс}}$ как функцию m . Подставляя ее в свою очередь в (98) и решая полученное выражение относительно m , приходим к расчетной формуле:

$$m = \sqrt{\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - D^2})}. \quad (101)$$

В подкоренном выражении следует взять знак «минус», так как знак «плюс» соответствует значениям m , превышающим 0,707. А при $m > 0,707$ зависимость $Z_{Tm} = \varphi(\eta)$ не имеет максимума в полосе пропускания и монотонно убывает.

Из условия

$$Z_{c \text{ мин}} = R$$

находим значения η , которые будут соответствовать границам используемой части полосы пропускания фильтра:

$$\eta_1 = 0; \quad \eta_2 = \frac{\sqrt{1-2m^2}}{1-m^2}. \quad (102)$$

Предельная частота фильтра

$$f_c = \frac{f_2}{\eta_2}. \quad (103)$$

Номинальное значение характеристического сопротивления

$$R = R_n \sqrt{D}. \quad (104)$$

Таким образом, все три параметра, необходимые для расчета элементов звена фильтра (R , m и f_c), найдены.

Расчетные формулы (101)–(103) остаются в силе также и для характеристического сопротивления типа $Z_{Пм}$. Только в этом случае величина R является не минимально допустимым, а максимально допустимым значением характеристического сопротивления в полосе эффективно пропускаемых частот, как показано на рис. 35,б.

Величина R определяется по формуле

$$R = \frac{R_n}{\sqrt{D}}. \quad (105)$$

16. Затухание эха

Рассмотрим реактивный четырехполюсник (рис. 36), включенный между активными (действительными) сопротивлениями R_r и R_n . Если действительную и мнимую

части входного сопротивления $Z_{вх}$ нагруженного четырехполюсника обозначить через $R_{вх}$ и $X_{вх}$, то активная мощность, поступающая на входные зажимы четырехполюсника, будет равна:

$$P_{вх} = \frac{E^2 R_{вх}}{(R_r + R_{вх})^2 + X_{вх}^2}. \quad (106)$$

Максимальная активная мощность, которую мог бы отдать данный генератор в нагрузку,

$$P_m = \frac{E^2}{4R_r}. \quad (107)$$

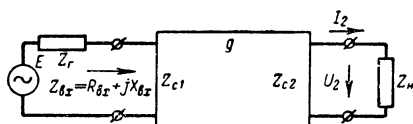


Рис. 36. К понятию о затухании эха реактивного четырехполюсника.

Разность между этой максимальной и поступающей на вход четырехполюсника мощностью представляет собой отраженную мощность $P_{отр}$.

Отношение отраженной активной мощности к максимальной будем считать равным квадрату величины коэффициента отражения ρ :

$$\rho^2 = \frac{P_{отр}}{P_m} = \frac{P_m - P_{вх}}{P_m} = 1 - \frac{P_{вх}}{P_m}. \quad (108)$$

Подставляя значения P_m и $P_{вх}$, получим:

$$\rho = \frac{R_r - Z_{вх}}{R_r + Z_{вх}},$$

где ρ — коэффициент отражения.

Так как четырехполюсник состоит только из реактивных элементов, то активная мощность $P_{вх}$, поступающая на входные зажимы, равняется мощности P_2 , поглощаемой сопротивлением нагрузки.

Следовательно, с учетом (76)

$$\frac{P_{вх}}{P_m} = \frac{P_2}{P_m} = e^{-2\alpha_p}$$

и (108) приобретает вид:

$$|\rho^2| = 1 - e^{-2a_p}. \quad (109)$$

Назовем затуханием эха величину

$$a_{\text{эхо}} = \ln \frac{1}{|\rho|} = \ln \left| \frac{R_r + Z_{\text{вх}}}{R_r - Z_{\text{вх}}} \right|. \quad (110)$$

Вводя величину $a_{\text{эхо}}$ в формулу (109), получим:

$$e^{-2a_{\text{эхо}}} + e^{-2a_p} = 1. \quad (111)$$

Затухание эха характеризует отражение активной мощности от входных зажимов четырехполюсника. При полном согласовании отражение отсутствует и $a_{\text{эхо}} = 0$. В случае полного отражения активной мощности ($R_{\text{вх}} = 0$ или $R_{\text{вх}} = \infty$) $a_{\text{эхо}} = \infty$.

Коэффициент отражения мощности в цепи генератор — нагрузка, определяемый формулой (109), не следует смешивать с известным из теории цепей с распределенными постоянными коэффициентом отражения падающих волн тока и напряжения в конце цепи

$$n = \frac{Z_n - Z_c}{Z_n + Z_c},$$

где Z_n — сопротивление нагрузки;
 Z_c — волновое сопротивление цепи.

Кроме того, следует помнить, что формула (109), полученная в результате рассмотрения активных мощностей, справедлива только для реактивного четырехполюсника, включенного между действительными сопротивлениями генератора и нагрузки.

Найдем зависимость между величинами $a_{\text{эхо}}$ и D . На основании формулы (81) максимально возможная величина рабочего затухания симметричного фильтра, обусловленная рассогласованием, в полосе пропускания равна:

$$e^{a_p} = \frac{1 + \delta^2}{2\delta},$$

где

$$\delta = \frac{Z_c}{R_n}.$$

Подставляя это значение e^{a_p} в формулу (111) и решая относительно $e^{a_{axo}}$, получим:

$$e^{a_{axo}} = \pm \frac{1 + \delta^2}{1 - \delta^2}.$$

Отсюда определяем значения δ_1 и δ_2 , имея в виду, что знак «плюс» относится к случаю $\delta_1 = \delta_{\min} < 1$, а знак «минус» — к случаю $\delta_2 = \delta_{\max} > 1$.

Составив отношение обоих решений, получим расчетную формулу:

$$D = \frac{e^{a_{axo}} - 1}{e^{a_{axo}} + 1}. \quad (112)$$

Если для полосы эффективно пропускаемых частот задана вместо максимально допустимой величины рабочего затухания минимально допустимая величина затухания эха a_{axo} , то следует определить по формуле (112) величину D , после чего расчет сводится к рассмотренному ранее случаю.

17. Некоторые вопросы расчета

1. Иногда в процессе расчета выясняется, что частота бесконечно большого затухания звена с коэффициентом m , вычисленным по формуле (101), попадает в переходную полосу. Это бывает, если задана сравнительно большая переходная полоса при нежестких требованиях к величине колебаний рабочего затухания и если в то же время выполнить фильтр с характеристическим сопротивлением типа Z_T или Z_{Π} не удастся.

Поэтому, определив величину $m = m_1$ по формуле (101), следует проверить, выполняется ли условие

$$\frac{f_3}{f_2} \leq \sqrt{\frac{1 - m_1^2}{1 - 2m_1^2}}, \quad (113)$$

где f_3 и f_2 — соответственно верхняя и нижняя границы переходной полосы.

Если окажется, что

$$\frac{f_3}{f_2} > \sqrt{\frac{1 - m_1^2}{1 - 2m_1^2}},$$

то частота бесконечно большого затухания звена типа m попадает в переходную полосу. Чтобы не допустить этого, следует при неизменных заданных f_2 и f_3 увеличить значение m , выбрав его, по крайней мере, из условия

$$\frac{f_3}{f_2} = \sqrt{\frac{1 - m_1^2}{1 - 2m_1^2}},$$

что дает

$$m_1 = \sqrt{\frac{\left(\frac{f_3}{f_2}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{f_3}{f_2}\right)^2 - 1}}. \quad (114)$$

Для полученного значения m_1 обычным путем определяем величины η_2 и f_c .

При таком выборе m частота бесконечно большого затухания совпадает с граничной частотой полосы эффективно задерживаемых частот. Увеличение же m само по себе приведет к уменьшению величины $a_{p, \max}$ в диапазоне $f_1 - f_2$.

Увеличение m полезно и по другой причине. До сих пор мы рассматривали только влияние рассогласования на колебания рабочего затухания фильтра без потерь. Наличие потерь в элементах фильтра приводит к появлению собственного (характеристического) затухания фильтра в полосе пропускания. Это затухание сравнительно невелико на низких частотах, но резко возрастает по мере приближения частоты к предельной и становится тем больше, чем меньше величина m .

При вычислении рабочего затухания фильтра с потерями характеристическое затухание, обусловленное потерями в элементах, складывается с затуханием, обусловленным несогласованностью (величина a в формуле (81) теперь не равна нулю). В результате может оказаться, что эффект хорошего согласования, получаемого при сравнительно небольших m , будет сведен к нулю влиянием потерь на величину a .

2. Укажем на возможность применения характеристических сопротивлений типа Z_{Tm} и $Z_{Пm}$ первого класса (т. е. имеющих коэффициент $m > 0,707$). В этом случае наибольший коэффициент использования полосы пропускания η_2 получается при $m = 0,707$ и составляет:

$$\eta_2 = \frac{1.41}{D} \sqrt{D^2 - 1 + \sqrt{1 - D^2}}. \quad (115)$$

3. При выводе расчетных формул для определения величин f_c , m и R мы предположили, что фильтр является симметричным ($Z_{c1} = Z_{c2}$). Однако полученные формулы являются справедливыми также и для *антисимметричного фильтра*, т. е. для такого фильтра, у которого характеристические сопротивления связаны зависимостью

$$Z_{c1}Z_{c2} = R^2.$$

В частности, антисимметричным является фильтр, который с одной пары зажимов имеет характеристическое сопротивление типа Z_{Π} , а с другой — Z_T , или с одной $Z_{\Pi m}$, а с другой — Z_{Tm} при одинаковых значениях m . Номинальные значения характеристического сопротивления R всех звеньев фильтра должны быть одинаковыми. Но при одинаковых значениях R оптимальные нагрузочные сопротивления в случае характеристических сопротивлений типов Z_T и Z_{Π} должны быть различными. Поэтому в случае антисимметричного фильтра произвольно может быть задана величина только одного из нагрузочных сопротивлений. Исходя из нее, можно определить значение R , а затем по известным R и D найти оптимальную величину второго нагрузочного сопротивления.

4. Иногда при задании требований к фильтру в ПЭПЧ указывают максимально допустимую величину отклонения характеристического сопротивления фильтра ($\pm \Delta\%$) от некоторой заданной величины. Например: «В диапазоне частот $f_1 - f_2$ характеристическое сопротивление фильтра не должно отклоняться от величины $R_H = 600 \text{ ом}$ более чем на $\pm 5\%$ ».

С помощью формул

$$Z_{c \text{ мин}} = R_H \left(1 - \frac{\Delta}{100}\right), \quad (116)$$

$$Z_{c \text{ макс}} = R_H \left(1 + \frac{\Delta}{100}\right), \quad (117)$$

$$D = \frac{100 - \Delta}{100 + \Delta}, \quad (118)$$

где величина Δ выражена в процентах, расчет сводится к рассмотренным ранее случаям.

Заметим, что одинаковые (в процентном отношении) отклонения характеристического сопротивления от нагрузочного в большую и меньшую сторону приводят к разным приращениям рабочего затухания, обусловленного несогласованностью.

5. Если в ПЭПЧ задана максимально допустимая величина коэффициента отражения $|\rho|$, то по формуле (110) можно определить соответствующую величину затухания эха $a_{\text{эхо}}$, после чего расчет сводится к рассмотренному ранее случаю.

6. В некоторых случаях при задании требований к фильтру в ПЭПЧ указывают не одну из величин $a_{\text{р. мин}}$, $a_{\text{эхо}}$ или Δ , а сразу две величины. Например, требуется, чтобы в полосе эффективно пропускаемых частот рабочее затухание фильтра $a_{\text{р. макс}}$ не превышало 0,4 *нп*, а коэффициент отражения был не менее 0,2.

Вычисляя величину D для обоих условий, находим, какое из них является более жестким (соответствует большему D), и для него выполняем расчет.

В приведенном примере более жестким является второе условие.

18. Способы определения количества и типа звеньев

В ходе предыдущего расчета была найдена предельная частота фильтра f_c . Это дает возможность определить нормированные граничные частоты полосы эффективно задерживаемых частот

$$\eta_3 = \frac{f_3}{f_c}, \quad (119)$$

$$\eta_4 = \frac{f_4}{f_c}. \quad (120)$$

Остается выбрать количество и типы звеньев таким образом, чтобы в диапазоне частот η_3 — η_4 рабочее затухание фильтра не падало ниже заданной нормы $a_{\text{р. мин}}$.

Мы рассмотрим три способа определения количества и типа звеньев: по семейству кривых характеристического затухания, аналитический способ и способ расчета с помощью шаблонов.

Первый из способов можно рекомендовать исключительно в простейших случаях. Второй разработан только для случая, когда величина $a_{p. \min}$ должна быть одинаковой во всем диапазоне частот $f_3 - f_4$. Наиболее универсальным является третий способ.

В основу расчета при всех трех способах положено понятие о характеристическом затухании фильтра. Поэтому необходимо установить связь между величиной характеристического и рабочего затухания фильтра в полосе задерживания. Обратимся к формуле рабочего затухания (81). При $a > 3-4$ *неп* $|e^{-g}| = |e^{-a} e^{-jb}| \ll 1$, и четвертое слагаемое в правой части формулы можно считать равным нулю.

Минимальная величина второго и третьего слагаемых в полосе пропускания (при действительных величинах характеристических и нагрузочных сопротивлений) была равна нулю. В полосе задерживания величины R_r и R_n по-прежнему остаются действительными, а величины Z_{c1} и Z_{c2} становятся мнимыми и изменяются в пределах от 0 до ∞ . Анализ показывает, что в случае мнимой величины Z_c минимум выражения $\ln \left| \frac{R_n + Z_c}{2 \sqrt{R_n Z_c}} \right|$ получается при $R_n = |Z_c|$ и равен

$$\ln \left| \frac{R_n + jR_n}{2 \sqrt{R_n j R_n}} \right| = \ln \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \approx -0,35.$$

Таких слагаемых в правой части формулы (81) имеется два. Следовательно, рабочее затухание фильтра в полосе задерживания на некоторых частотах становится меньше характеристического на 0,7 *неп*. Чтобы рабочее затухание фильтра в диапазоне частот $\eta_3 - \eta_4$ заведомо не падало ниже заданной величины $a_{p. \min}$, необходимо, чтобы характеристическое затухание в этом же диапазоне частот не падало ниже величины

$$a_{\min} = a_{p. \min} + 0,7, \quad (121)$$

где величины затуханий берутся в *неперах*.

На некоторых участках полосы задерживания второе и третье слагаемые будут положительны, и рабочее затухание будет больше характеристического, что не нарушит требования $a_p \geq a_{p. \min}$.

19. Расчет по семейству кривых характеристического затухания

Методика расчета сводится к следующему.

1. По известным частотам f_3 , f_4 и f_c определяем нормированные частоты η_3 и η_4 .

2. Определяем по формуле (121) минимально допустимую величину a_{\min} характеристического затухания фильтра в полосе эффективно задерживаемых частот.

3. Рассматривая семейство кривых частотной зависимости характеристического затухания звеньев с разными значениями m (рис. 25), выбираем несколько кривых с таким расчетом, чтобы сумма их ординат (т. е. сумма затуханий соответствующих звеньев) во всем диапазоне частот η_3 — η_4 не падала ниже величины a_{\min} .

Разумеется, желательно решить задачу, используя минимально возможное количество звеньев. Если характеристическое сопротивление рассчитываемого фильтра относится к типу Z_T или Z_{Π} , то выбор звеньев совершенно произволен. Если же в ходе предыдущего расчета установлено, что характеристическое сопротивление должно быть типа Z_{Tm} или $Z_{\Pi m}$ и была найдена величина коэффициента m оконечных полувзвеньев, то среди выбранных звеньев обязательно должно быть звено со значением m , найденным из условия согласования.

4. Составляем схему фильтра и находим величины ее элементов.

Пример 20. Продолжим расчет фильтра, начатый в примере 19.
Решение.

$$1. \eta_3 = \frac{f_3}{f_c} = \frac{4,12 \cdot 10^3}{3,78 \cdot 10^3} = 1,09;$$

$$\eta_4 = \frac{f_4}{f_c} = \frac{150 \cdot 10^3}{3,78 \cdot 10^3} \approx 40.$$

2. $a_{\min} = a_{p, \min} + 0,7 = 2,8 + 0,7 = 3,5 \text{ nep.}$

3. Рассматривая семейство кривых характеристического затухания (рис. 25), убеждаемся, что при $\eta = \eta_3 = 1,09$ звено типа $m = 0,416$ обеспечивает требуемую величину затухания. Но при более высоких частотах затухание звена падает ниже 1 *неп.* Если кроме этого звена ввести в схему фильтра еще звено типа k , то все равно в пределах некоторого участка ПЭЗЧ (вблизи $\eta = 1,3$) суммарное затухание звеньев будет менее 3,5 *неп.* Норма затухания будет обеспечена при одном звене типа $m = 0,416$ и полутора звеньях

типа k . Фильтр получается антисимметричным. Если необходимо получить симметричную схему, следует взять не полтора, а два звена типа k .

Недостатки метода очевидны. Для мысленного суммирования кривых необходим известный навык. Суммирование становится затруднительным при большом количестве звеньев (при большой величине требуемого затухания). Наконец, на одном чертеже удастся показать лишь ограниченное количество кривых.

20. Аналитический способ расчета

Теоретическое обоснование и вывод формул для аналитического определения количества и типа звеньев фильтра сопряжено с громоздкими выкладками. В то же время окончательные расчетные формулы получаются весьма несложными. Поэтому целесообразно сначала рассмотреть саму методику расчета, а затем показать, как были получены расчетные формулы.

Начнем со случая, когда фильтр может быть выполнен с характеристическим сопротивлением типа Z_T или Z_{Π} . Считаем, что предельная частота f_c фильтра известна (вычислена в ходе предыдущего расчета или задана).

1. Определяем границы полосы эффективно задерживаемых частот:

$$\eta_3 = \frac{f_3}{f_c}; \quad \eta_4 = \frac{f_4}{f_c}.$$

2. Вычисляем вспомогательные расчетные параметры:

$$t_3 = \frac{\eta_3}{\sqrt{\eta_3^2 - 1}}, \quad (122)$$

$$t_4 = \frac{\eta_4}{\sqrt{\eta_4^2 - 1}}, \quad (123)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{t_3 t_4}}, \quad (124)$$

$$k' = \frac{t_4}{t_3}, \quad (125)$$

$$\rho^* = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}, \quad (126)$$

$$a_0 = \ln \frac{1}{\rho}. \quad (127)$$

Параметры t_3 и t_4 можно не вычислять по формулам (122) и (123), а определить с помощью табл. 2, помещенной в конце книги. Первый столбец таблицы содержит значения η , второй — соответствующие значения t . При $\eta_4 \geq 7$ можно с достаточной для практики точностью считать $t_4 = 1$.

3. Определяем требуемую минимально допустимую величину характеристического затухания фильтра в полосе эффективно задерживаемых частот:

$$a_{\text{мин}} = a_{\text{р. мин}} + 0,7.$$

4. Определяем число звеньев N' фильтра, необходимое для получения характеристического затухания, не меньшего, чем $a_{\text{мин}}$ (ден) в диапазоне частот η_3 — η_4 :

$$N' = \frac{a_{\text{мин}} + 0,69}{a_0 + 0,69}. \quad (128)$$

Полученную величину округляем в большую сторону до ближайшей, кратной 0,5. Округленную величину обозначим символом $N_{\text{окр}}$.

5. Если полученная (округленная) величина является целым числом

$$N_{\text{окр}} = N,$$

то значения коэффициентов m_ν звеньев фильтра определяем по формуле

$$m_\nu = \gamma \frac{1 + \rho \cos \frac{2\nu - 1}{2N} \pi}{1 - \rho \cos \frac{2\nu - 1}{2N} \pi}, \quad (129)$$

где $\nu = 1, 2, \dots, N$.

* В формуле (126) ρ обозначает не коэффициент отражения энергии, а расчетный параметр.

6. Если полученная (округленная) величина является дробным числом, целая часть которого равна N ,

$$N_{\text{окр}} = N + 0,5,$$

то значения m , определяем по формуле

$$m_v = \gamma \frac{1 + \rho \cos \frac{2(v-1)}{2N+1} \pi}{1 - \rho \cos \frac{2(v-1)}{2N+1} \pi}, \quad (130)$$

где $v = 1, 2, \dots, N + 1$.

7. Учитывая, что величина N' в ходе расчета была округлена в большую сторону, находим действительную минимальную величину характеристического затухания полученного фильтра:

$$\alpha_{\text{мин.д}} = \ln \frac{2^{N-1}}{\rho^N}. \quad (131)$$

8. Решаем, из каких (последовательно-производных или параллельно-производных) звеньев будет выполнен фильтр, составляем схему и определяем величины ее элементов.

В случае целого числа звеньев составление схемы не вызывает затруднений.

При дробном числе звеньев схема будет содержать одно полужвено (Г-образное звено). Параметр m этого полужвена определяется по формуле (130) при $v=1$ и, как легко убедиться, оказывается равным 1. Итак, при дробном числе звеньев схема всегда содержит полужвено типа k .

Наличие полужвена в схеме фильтра приводит к тому, что фильтр получается антисимметричным и должен иметь неодинаковые нагрузочные сопротивления (см. п. 3 § 17). Если при расчете получена дробная величина $N_{\text{окр}}$, а антисимметричная схема почему-либо является нежелательной, то следует округлить величину $N_{\text{окр}}$ до ближайшего (большего) целого числа. Это приведет к появлению в схеме фильтра нового звена типа m вместо полужвена типа k .

Более экономичное решение (симметричная схема с меньшим количеством элементов) будет получено,

если в случае дробной величины $N_{\text{окр}}$ выполнить расчет обычным порядком (не округляя ее), а при составлении схемы взять вместо полузвена типа k целое звено.

Например, при $N=1,5$ фильтр состоит из звена типа m и полузвена типа k , и его схема содержит пять элементов. Заменяя полузвено типа k полным звеном, мы должны будем ввести в схему еще один, шестой, элемент. В то же время округление величины N до $N=2$ приведет к семиэлементной схеме фильтра из двух звеньев типа m . Первое решение является более экономичным. Правда, второе дает большую величину затухания в ПЭЗЧ. Но требуемая норма затухания, очевидно, обеспечивается уже при $N=1,5$.

Пример 21. Продолжим расчет фильтра, начатый в примере 19, аналитическим способом. По формулам (122—130) и табл. 2 находим:

$$\eta_3 = 1,09; \eta_4 = 40; t_3 = 2,51; t_4 = 1;$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{t_3 t_4}} = \frac{1}{\sqrt{2,51 \cdot 1}} = 0,63;$$

$$k' = \frac{t_4}{t_3} = \frac{1}{2,51} = 0,398;$$

$$\rho = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} = \frac{1 - \sqrt{0,398}}{1 + \sqrt{0,398}} = 0,227;$$

$$a_0 = \ln \frac{1}{\rho} = \ln \frac{1}{0,227} = 1,47;$$

$$a_{\text{мин}} = a_{\text{р. мин}} + 0,7 = 2,8 + 0,7 = 3,5 \text{ неп};$$

$$N' = \frac{a_{\text{мин}} + 0,69}{a_0 + 0,69} = \frac{3,5 + 0,69}{1,48 + 0,69} = 1,93;$$

$$N_{\text{окр}} = 2.$$

По формуле (129) находим:

$$m_1 = 0,87; m_2 = 0,456.$$

Итак, фильтр должен состоять из двух звеньев типа m . Полученное решение является более экономичным, чем найденное в примере по семейству кривых. Найти такое решение по семейству кривых не удалось, так как на рисунке семейства было изображено ограниченное количество кривых.

Если фильтр не может быть выполнен с характеристическим сопротивлением типа Z_T или Z_{Π} , то однозначное решение задачи, подобное рассмотренному выше, отсутствует. В самом деле, определив величину коэффициента m_1 окончных полужвеньев по формуле (101), а величину η_2 — по формуле (102) и продолжая расчет, как в случае фильтра с характеристическим сопротивлением типа Z_T или Z_{Π} , мы можем определить оптимальные значения параметров m_v . Однако нет никакой уверенности что одно из полученных таким способом значений m_v , окажется равным величине m_1 , найденной в начале расчета.

Указанное затруднение можно преодолеть несколькими способами. При первом способе, убедившись, что фильтр не может быть выполнен с характеристическим сопротивлением типа Z_T или Z_{Π} , произвольно выбираем предельную частоту фильтра f_c равной среднему геометрическому граничных частот переходной полосы и ведем расчет следующим образом:

1. Принимаем

$$f_c = \sqrt{f_2 f_3}. \quad (132)$$

2. Находим значение η_2 :

$$\eta_2 = \frac{f_2}{f_c}. \quad (133)$$

3. Определяем значение параметра m , соответствующее коэффициенту использования полосы пропускания, равному η_2 :

$$m_{\text{опт}} = \frac{\sqrt{1 - \eta_2^2 + \eta_2^2 - 1}}{\eta_2}. \quad (134)$$

4. Находим величины η_3 и η_4 .

5. Обычным порядком, как показано в начале параграфа, вычисляем значения m_v .

6. Определяем величину $D = Z_{\text{с мин}}/Z_{\text{с макс}}$ в диапазоне частот $\eta_1 - \eta_2$ для двух значений m_v , ближайших к найденной по формуле (134) величине $m_{\text{опт}}$: большего чем $m_{\text{опт}}$ и меньшего чем $m_{\text{опт}}$.

Параметр D_v определяем, в зависимости от величины m_v , по одной из следующих формул:

а) при $m_v \geq 0,707$

$$D_v = \frac{\sqrt{1 - \eta_2^2}}{1 - (1 - m_v^2) \eta_2^2}; \quad (135)$$

б) при $m_v < 0,707$ и

$$\frac{\sqrt{1 - \eta_2^2}}{1 - (1 - m_v^2) \eta_2^2} < 1$$

$$D_v = \frac{2m_v \sqrt{1 - m_v^2} \sqrt{1 - \eta_2^2}}{1 - (1 - m_v^2) \eta_2^2}; \quad (136)$$

в) при $m_v < 0,707$ и

$$\frac{\sqrt{1 - \eta_2^2}}{1 - (1 - m_v^2) \eta_2^2} > 1$$

$$D_v = 2m_v \sqrt{1 - m_v^2}. \quad (137)$$

В качестве параметра m конечных полувеньев принимаем то значение $m_v = m_i$, для которого величина $D_v = D_i$ окажется большей.

7. Находим величину максимально возможного затухания $a_{p.макс}$ в полосе частот $\eta_1 - \eta_2$, соответствующую выбранному значению $m_v = m_i$ и, следовательно, параметру $D_v = D_i$:

$$a_{p.макс} = \ln \frac{1 + D_i}{2 \sqrt{D_i}}. \quad (138)$$

Минимально возможную величину затухания эха в том же диапазоне можно найти по формуле

$$a_{\text{эхо мин}} = \ln \frac{1 + D_i}{1 - D_i}. \quad (139)$$

8. Номинальное значение характеристического сопротивления определяем с учетом того, по какой из формул (135)—(137) была найдена принятая величина D_i :

а) При $m \geq 0,707$ в случае характеристического сопротивления типа $Z_{\Pi m}$,

$$R = R_{\Pi} \sqrt{D_i},$$

а в случае Z_{Tm}

$$R = \frac{R_{\Pi}}{\sqrt{D_i}}.$$

б) Если параметр D_i найден по формуле (136), то в случае характеристического сопротивления типа Z_{Tm}

$$R = \frac{2m_i \sqrt{1 - m_i^2} R_{\Pi}}{\sqrt{D_i}},$$

а в случае $Z_{\Pi m}$

$$R = \frac{R_{\Pi} \sqrt{D_i}}{2m_i \sqrt{1 - m_i^2}}.$$

в) Если параметр D_i найден по формуле (137), то в случае характеристического сопротивления типа Z_{Tm}

$$R = R_{\Pi} \sqrt{D_i},$$

а в случае $Z_{\Pi m}$

$$R = \frac{R_{\Pi}}{\sqrt{D_i}}.$$

Поясним, что в случае «а» максимальное рассогласование между величинами R_{Π} и Z_c имеет место в двух точках ПЭПЧ: на ее границах. В случае «б» максимальное рассогласование имеет место не в трех точках (как было бы при оптимальном значении $m = m_{\text{опт}}$), а в двух точках ПЭПЧ: при $\eta = \eta_m$ и $\eta = \eta_2$. В случае «в» максимальное рассогласование имеет место также в двух точках, но уже при $\eta = \eta_1$ и $\eta = \eta_m$. Сказанное поясняется соответственно рис. 37, а, б и в на примере характеристического сопротивления типа Z_{Tm} .

9. Составляя схему фильтра, звено с параметром $m_i = m_i$ необходимо разбить на два полувзвена и включить их на входе и выходе фильтра.

При втором способе расчета определяем величину параметра m окончных полузвеньев по формуле (101) и, если выполняется условие (113), продолжаем расчет, как в предыдущем случае.

После определения значений m_v выбираем в качестве параметра m окончных полузвеньев одно из двух значений m_v , ближайших к найденной по формуле (101) вели-

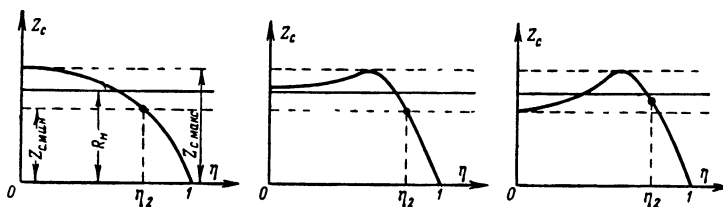


Рис. 37. К расчету величины R .

чине m . Методика выбора ничем не отличается от рассмотренной выше.

При третьем способе расчета определяем величину параметра m окончных полузвеньев по формуле (101) и, если выполняется условие (113), продолжаем расчет обычным порядком.

Определив значения параметров m_v , составляем схему фильтра из звеньев с характеристическим сопротивлением Z_T и Z_{II} , имеющих найденные значения параметров m_v . А на входе и выходе фильтра дополнительно включаем полузвенья с параметром m , найденным по формуле (101) из условия наилучшего согласования характеристического и нагрузочных сопротивлений.

Теперь покажем, как были получены расчетные формулы для определения коэффициентов m_v .

Путем подстановки легко проверить справедливость равенства

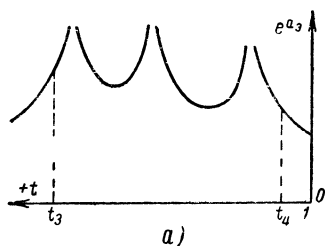
$$e^{g_v} = \frac{1 + \operatorname{th} \frac{g_v}{2}}{1 - \operatorname{th} \frac{g_v}{2}}.$$

Если предположить, что g_v — характеристическая постоянная передачи Т- или П-образного звена фильтра, то

$g_v/2$ можно рассматривать как характеристическую постоянную передачи Г-образного звена.

В соответствии с (54)

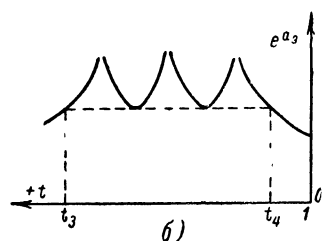
$$\operatorname{th} g_v = \operatorname{th} \frac{g_v}{2} = m_v \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}}.$$



Обозначим

$$\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}} = t. \quad (140)$$

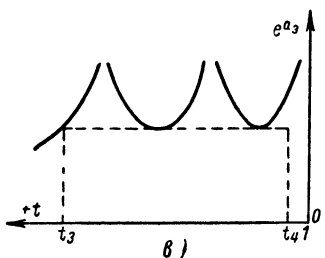
При каскадном соединении N звеньев по принципу согласования характеристических сопротивлений получим:



$$e^{g_a} = e^{g_1} e^{g_2} \dots e^{g_N} = \frac{1 + m_1 t}{1 - m_1 t} \times$$

$$\times \frac{1 + m_2 t}{1 - m_2 t} \dots \frac{1 + m_N t}{1 - m_N t} =$$

$$= \prod_{v=1}^{v=N} \frac{1 + m_v t}{1 - m_v t}. \quad (141)$$



Характер зависимости

$$|e^{g_a}| = e^{a_a} = \varphi(t)$$

для $N=3$ показан на рис. 38, а. (Число частот бесконечно большого затухания равно N .)

Чтобы перемещение вдоль оси t слева направо соответствовало увеличению нормированной частоты η , положительное направление оси t на рис. 38 выбрано противоположным общепринятому.

Рис. 38. К выбору оптимальных значений параметров m трехзвенного фильтра.

Задача расчета состоит в определении таких значений m_v , при которых минимум функции $e^a = \varphi(t)$ имеет на за-

данном отрезке $t_3 - t_4$ (что соответствует диапазону частот $\eta_3 - \eta_4$) максимально возможную величину.

Можно показать, что при заданном N максимально возможное значение минимума будет в том случае, если во всех точках минимума, расположенных между точками бесконечно большого затухания, а также на границах отрезка $t_3 - t_4$ функция будет иметь одинаковое значение, как показано на рис. 38, б. Значения m_v , при которых выполняются эти условия, будем называть оптимальными.

Прежде чем перейти к дальнейшему рассмотрению, преобразуем выражение $m_v t$ в формуле (141) следующим образом:

$$m_v t = \frac{m_v}{\gamma} t \gamma = M_v \tau,$$

где

$$M_v = \frac{m_v}{\gamma}, \quad (142)$$

$$\tau = t \gamma, \quad (143)$$

а величина γ выбрана так, чтобы соблюдались равенства

$$\frac{\eta_3}{\sqrt{\eta_3^2 - 1}} \gamma = t_3 \gamma = \tau_3 = \frac{1}{\sqrt{k'}} \quad (144)$$

и

$$\frac{\eta_4}{\sqrt{\eta_4^2 - 1}} \gamma = t_4 \gamma = \tau_4 = \sqrt{k'}. \quad (145)$$

Из (144) и (145) находим:

$$k' = \frac{t_4}{t_3}, \quad (146)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{t_4 t_3}}. \quad (147)$$

С учетом (142) и (143) формула (141) приобретает вид:

$$e^{g_0} = \prod_{v=1}^N \frac{1 + M_v \tau}{1 - M_v \tau}. \quad (148)$$

По своей структуре (148) не отличается от (141). Но в результате выполненного преобразования переменная τ в (148) при увеличении η от η_3 до η_4 изменяется соответственно от $1/\sqrt{k'}$ до $\sqrt{k'}$.

Для определения оптимальных значений m , воспользуемся свойствами двоякопериодической эллиптической функции Якоби $\operatorname{dn}(u, k)$. На действительной оси плоскости комплексного переменного u эта функция имеет период $2K$, а на мнимой оси—период $4K'$.

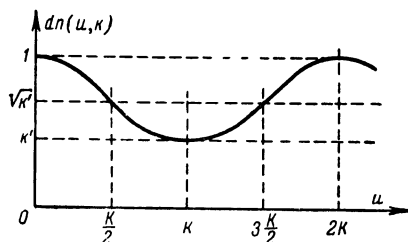


Рис. 39. График функции $\operatorname{dn}(u, k)$.

График функции $\operatorname{dn}(u, k)$ для случая действительных значений комплексной переменной u изображен на рис. 39. Отсылая интересующихся к специальной литературе [Л. 2], приведем здесь без вывода и доказательства некоторые характерные значения и свойства функции $\operatorname{dn}(u, k)$, полагая u действительной величиной:

$$\operatorname{dn}(0, k) = 1;$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{K}{2}, k\right) = \sqrt{k'};$$

$$\operatorname{dn}(K, k) = k';$$

$$\operatorname{dn}(K \pm u, k) = \frac{k'}{\operatorname{dn}(u, k)},$$

где $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$ — полный эллиптический интеграл;

k — модуль эллиптической функции, лежащий в пределах $0 \leq k \leq 1$.

Экстремальные значения функции $\operatorname{dn}(u, k)$ равны 1 и k' . Размах колебаний функции $\operatorname{dn}(u, k)$ зависит от величины модуля функции k :

$$k' = \sqrt{1 - k^2}. \quad (149)$$

Производя в (148) предложенную в [Л. 6] замену переменной по формуле

$$\tau \Rightarrow \frac{\sqrt{k'}}{\operatorname{dn}(u, k)}, \quad (150)$$

получим:

$$e^{g_a} = \prod_{v=1}^N \frac{1 + M_v \frac{\sqrt{k'}}{\operatorname{dn}(u, k)}}{1 - M_v \frac{\sqrt{k'}}{\operatorname{dn}(u, k)}}. \quad (151)$$

С учетом (145) и (150) находим: при $\tau = \tau_4 = \sqrt{k'}$

$$\frac{\sqrt{k'}}{\operatorname{dn}(u, k)} = \sqrt{k'},$$

что соответствует значению $\operatorname{dn}(u, k) = 1$ и $u = 0$; при $\tau = \tau_3 = \frac{1}{\sqrt{k'}}$

$$\frac{\sqrt{k'}}{\operatorname{dn}(u, k)} = \frac{1}{\sqrt{k'}},$$

откуда

$$\operatorname{dn}(u, k) = k',$$

что соответствует значению $u = K$. Итак, при изменении τ от τ_4 до τ_3 переменная u в (151) должна изменяться от $u = 0$ до $u = K$.

Введем в рассмотрение функцию $\operatorname{dn}(nu, k_1)$, которая, очевидно, отличается от функции $\operatorname{dn}(u, k)$ величиной действительного периода и модуля (k_1). Множитель n выберем таким образом, чтобы действительный период $2K_1$ функции $\operatorname{dn}(nu, k_1)$ был в N раз меньше действительного периода $2K$ функции $\operatorname{dn}(u, k)$:

$$K_1 = \frac{K}{N}. \quad (152)$$

Модуль k_1 , от величины которого зависит отношение мнимого и действительного периодов эллиптической функции, выбираем таким образом, чтобы соблюдалось равенство:

$$\frac{K'_1}{K_1} = N \frac{K'}{K}. \quad (153)$$

Наличие зависимости (152) удобно показать, записав аргумент функции $\operatorname{dn}(nu, k_1)$ следующим образом:

$$\operatorname{dn}(nu, k_1) = \operatorname{dn}\left(\frac{Nu}{K} K_1, k_1\right).$$

Составим равенство

$$\begin{aligned} e^{g_a} &= \prod_{v=1}^N \frac{1 + M_v \frac{\sqrt{k'}}{\operatorname{dn}(u, k)}}{1 - M_v \frac{\sqrt{k'}}{\operatorname{dn}(u, k)}} = \\ &= \frac{1 + \frac{\sqrt{k'_1}}{\operatorname{dn}\left(\frac{Nu}{K} K_1, k_1\right)}}{1 - \frac{\sqrt{k'_1}}{\operatorname{dn}\left(\frac{Nu}{K} K_1, k_1\right)}} \end{aligned} \quad (154)$$

и проверим, может ли оно выполняться и при каких условиях. Две функции комплексного переменного u тождественно равны друг другу, если нули и полюсы (корни числителя и знаменателя) одной из них совпадают с нулями и полюсами другой и если известно, что обе функции принимают одинаковое значение хотя бы при одном каком-либо значении u .

Можно показать, что при $u = u_0 = K + jK'$

$$\operatorname{dn}(u_0, k) = 0;$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{Nu_0}{K} K_1, k_1\right) = 0 \text{ при четном } N,$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{Nu_0}{K} K_1, k_1\right) = \infty \text{ при нечетном } N.$$

Поэтому при $u = u_0$ правая и левая части (154) равны $+1$ при N четном и -1 при N нечетном. Таким образом, равенство функций при одном значении u доказано.

Перейдем к условию равенства корней знаменателей (154). При изменении u вдоль реальной оси от 0 до K функция $\operatorname{dn}\left(\frac{Nu}{K}, k_1\right)$ становится N раз равной $\sqrt{k'_1}$ и, соответственно, знаменатель правой части (154) N раз обращается в нуль. Это происходит при значениях

$$u_v = \frac{(2v-1)}{2N} K, \quad (155)$$

где $v = 1, 2, \dots, N$.

Чтобы равенство (154) выполнялось, необходимо так выбрать M_v , чтобы при каждом из значений u_v , определяемых формулой (155), обращался в нуль знаменатель одного из сомножителей левой части. Таким образом,

$$M_v = \frac{\operatorname{dn}(u_v, k)}{\sqrt{k'}}. \quad (156)$$

Зная M_v , из (142) определим искомые величины m_v .

Чтобы при расчетах не прибегать к таблицам эллиптических функций, можно выразить функцию $\operatorname{dn}(u, k)$ через ϑ -функции (см. приложение 2), что приводит к приближенному равенству

$$\operatorname{dn}(u, k) = \sqrt{k'} \frac{1 + 2h \cos 2\pi\vartheta}{1 - 2h \cos 2\pi\vartheta}, \quad (157)$$

где $\vartheta = \frac{u}{2K}$,

$$h = e^{-\pi \frac{K'}{K}}. \quad (158)$$

При $u = K$ $\operatorname{dn}(u, k) = k'$, $\cos 2\pi\vartheta = -1$.

Подставляя эти значения в (157), найдем:

$$h = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} = \frac{\rho}{2}, \quad (159)$$

где

$$\rho = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}. \quad (160)$$

С учетом (155)—(159) для целых значений N (т. е. для целого числа звеньев) получим:

$$M_v = \frac{1 + \rho \cos \frac{2v-1}{2N} \pi}{1 - \rho \cos \frac{2v-1}{2N} \pi}. \quad (161)$$

Формула (130) для дробного числа звеньев получена аналогичным образом. Только в ходе ее вывода было сделано предположение, что один из полюсов затухания фильтра лежит при $t=1$ (т. е. при $\eta=\infty$), как показано на рис. 38, в.

Для определения числа звеньев фильтра N по [Л. 6] выразим через тэта-функции функцию $\operatorname{dn} \left(\frac{Nu}{K}, k_1 \right)$:

$$\operatorname{dn} \left(\frac{Nu}{K}, k_1 \right) = \sqrt{k'_1} \frac{1 + 2h^N \cos 2\pi\vartheta_1}{1 - 2h^N \cos 2\pi\vartheta_1}, \quad (162)$$

где

$$\vartheta_1 = \frac{u}{2K_1},$$

и в соответствии с (153) и (158)

$$e^{-\pi \frac{K'_1}{K_1}} = e^{-\pi N \frac{K'}{K}}.$$

Подставляя значение dn из (162) в (154), найдем:

$$\alpha = \ln \frac{1}{2h^N \cos 2\pi\vartheta_1}. \quad (163)$$

Минимальные значения собственного затухания имеют место при $\cos 2\pi\vartheta_1 = 1$ (что соответствует величинам

$$u = u_s = \frac{sK}{N},$$

где $s=0, 1, 2, \dots, N$), и равны

$$\alpha_{\min} = \ln \frac{1}{2h^N} = \ln \frac{2^{N-1}}{\rho^N}. \quad (164)$$

Вводя обозначение

$$\alpha_0 = \ln \frac{1}{p},$$

находим:

$$\alpha_{\text{мин}} = (N - 1) \ln 2 + N \alpha_0,$$

откуда

$$N = \frac{\alpha_{\text{мин}} + 0,69}{\alpha_0 + 0,69}. \quad (165)$$

21. Расчет с помощью шаблона (лекала)

Сравнительно простым, наглядным и точным является предложенный Румпельтом [Л. 8] способ определения количества и типов звеньев с помощью лекала (шаблона).

Способ основан на особом преобразовании масштаба оси нормированной частоты η . Введем вместо переменной η переменную величину y :

$$y = \ln \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}}. \quad (166)$$

Тогда, например, значению $\eta = \eta_{\infty i}$ будет соответствовать значение $y = y_{\infty i}$, равное

$$y_{\infty i} = \ln \frac{\eta_{\infty i}}{\sqrt{\eta_{\infty i}^2 - 1}}. \quad (167)$$

Из (166) и (167) следует:

$$\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}} = e^y,$$

$$\frac{\sqrt{\eta_{\infty i}^2 - 1}}{\eta_{\infty i}} = m_i = e^{-y_{\infty i}}.$$

Подставляя эти значения в формулу для характеристической постоянной передачи Т- или П-образного звена, получим:

$$\text{th } \frac{g_i}{2} = \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}} m_i = e^y e^{-y_{\infty i}} = e^{y - y_{\infty i}}. \quad (168)$$

Таким образом, в масштабе частоты y величина $\text{th } g/2$, а следовательно, и величина a при любом значении $y_{\infty i}$ (или m_i) зависит только от разности $y - y_{\infty i}$. Поэтому для построения зависимости $a = \varphi(y)$ при любом значении m можно применить один и тот же шаблон (лекало), представляющий собой (в определенном масштабе) график зависимости

$$a = 2 \operatorname{Re}[\operatorname{Arth} e^y].$$

Этот шаблон для вещественных значений y показан на рис. 40. Он симметричен относительно оси ординат.

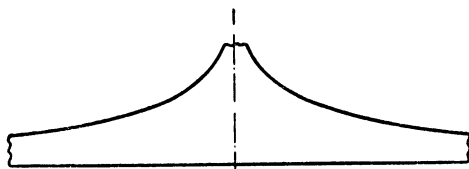


Рис. 40. Шаблон характеристического затухания звена (вершина и боковые ветви оборваны).

Левая его ветвь соответствует зависимости

$$a = 2 \operatorname{Arth} e^y.$$

(при $y < 0$ $e^y < 1$), а правая ветвь — зависимости

$$a = 2 \operatorname{Arcth} e^y$$

(при $y > 0$ $e^y > 1$).

Как же удастся с помощью одного и того же шаблона изобразить графики частотной зависимости затухания, которые в масштабе оси частот f или η имеют разную форму? Дело в том, что в масштабе

$$y = \ln \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}},$$

как легко убедиться, величина $\eta = 1$ преобразуется в величину $y = +\infty$, а $\eta = \infty$ — в $y = 0$. Ось нормированных частот η как бы сжимается в своей правой части и сильно растягивается в левой при малых значениях η . Точка $\eta = 1$ оси η уходит в точку $y = +\infty$ оси y и не может быть построена на чертеже. Но в этом и нет никакой необходимости, потому что частотная зависимость затухания в переходной полосе и в частности при $\eta \rightarrow 1$ практически не представляет интереса.

Шаблон лучше всего изготовить из органического стекла, в крайнем случае можно обойтись листом тонкого картона или достаточно плотной бумаги. На листе выбранного материала строят график зависимости $a = \varphi(y)$ и вырезают его по контуру. Рекомендательный масштаб оси абсцисс: 20 см на чертеже соответствуют одной единице величины y . Масштаб оси ординат: 2 см на чертеже соответствуют одной единице затухания, т. е. затуханию $a = 1$ неп.

При изготовлении шаблона в указанном масштабе можно воспользоваться табл. 3. В первом столбце этой таблицы приведены значения величины y от 0 до ∞ (шаблон симметричен относительно оси a). Во втором столбце — соответствующие значения характеристического затухания a . Третий столбец содержит значения y , пересчитанные в сантиметры чертежа ($\Delta y = 1$ соответствует 20 см), четвертый столбец содержит значения a , пересчитанные в сантиметры чертежа (шаблона) в масштабе $\Delta a = 1$ соответствует 2 см.

Чтобы с помощью шаблона построить зависимость $a = \varphi(y)$, соответствующую определенной величине $y_{\infty i}$, следует начертить на листе бумаги в выбранном масштабе ось y , совместить с этой осью основание шаблона таким образом, чтобы начало координат шаблона (точка $y = 0$) совпало со значением частотной оси $y = y_{\infty i}$. После этого остается обвести шаблон карандашом.

Порядок расчета с помощью шаблона следующий.

1. На листе миллиметровой бумаги строим ось y , приняв для одной единицы оси такой же масштаб, какой был принят при изготовлении шаблона. При изменении η от 1 до ∞ величина y меняется от ∞ до 0. Чтобы перемещение по оси y слева направо соответствовало увеличению нормированной частоты η , будем откладывать положительные значения y не вправо, а влево от точки $y = 0$. Иными словами, положительное направление оси «частот» y выбираем обратным общепринятому.

2. По известным границам полосы эффективно задерживаемых частот в масштабе η (η_3 и η_4) находим границы ПЭЗЧ в масштабе y (y_3 и y_4). Наносим эти точки на ось y и восстанавливаем в них перпендикуляры к оси y .

Для перехода от масштаба η к масштабу y и обратно удобно пользоваться табл. 2. В первом столбце этой таблицы указаны значения η от 1 до ∞ , в третьем — соответствующие значения y , а в четвертом — значения y , выраженные в сантиметрах, полагая, что 20 см чертежа соответствуют единице y .

Таблица дает возможность по величине η (первый столбец таблицы) определить в принятом масштабе величину y непосредственно в сантиметрах (четвертый столбец таблицы) или совершить обратное преобразование y (см) в η .

3. Определяем минимально допустимую величину характеристического затухания фильтра

$$a_{\text{мин}} = a_{\text{р. мин}} + 0,7$$

и наносим ее на чертеже.

Если фильтр может быть выполнен с характеристическим сопротивлением типа Z_T или Z_{Π} , то далее поступаем следующим образом.

4. Находим, в каких точках оси y следует построить с помощью шаблона кривые, чтобы сумма ординат этих кривых на отрезке y_3 — y_4 оси y не падала ниже требуемой нормы $a_{\text{мин}}$. При этом необходимо стремиться обеспечить требуемую величину затухания $a_{\text{мин}}$ с помощью минимального количества звеньев. Возможно, придется испробовать несколько вариантов, пока не будет найдено оптимальное решение.

5. Для каждой из построенных кривых непосредственно по оси y определяем частоту полюса затухания $y_{\infty i}$ и, пересчитывая ее в масштаб η , находим нормированную частоту полюса затухания $\eta_{\infty i}$.

6. Зная частоту $\eta_{\infty i}$, находим величину параметра m_i соответствующего звена:

$$m_i = \frac{\sqrt{\eta_{\infty i}^2 - 1}}{\eta_{\infty i}} \quad (169)$$

или

$$m_i = \text{anti ln}(-y_{\infty i}). \quad (170)$$

7. Составляем схему фильтра и находим величины ее элементов.

Пример 22. Продолжим расчет фильтра, начатый в примере 19, с помощью шаблона Румпеля. Для рассчитываемого фильтра $\eta_3 = 1,09$; $\eta_4 = 40$; $a_{\text{мин}} = 3,5$ неп.

Решение 1. По табл. 2, зная η_3 и η_4 , находим: $y_3 = 18,4$ см, $y_4 \approx 0$ см. Наносим эти точки на ось y (рис. 41) и восстанавливаем в них перпендикуляры к оси y .

2. Наносим на чертеж требуемую норму характеристического затухания $a_{\text{мин}}$.

3. После нескольких проб приходим к выводу, что наиболее экономичным будет решение, показанное на рис. 41.

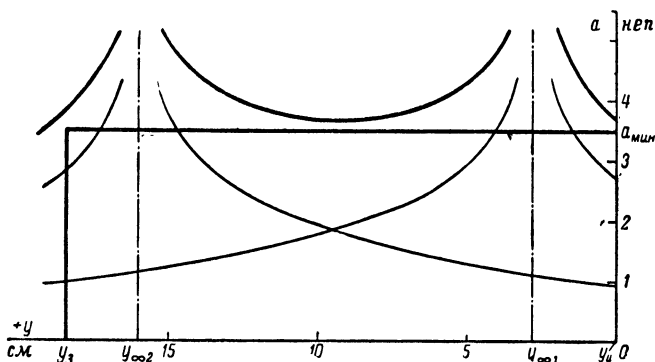


Рис. 41. К примеру 22.

Непосредственно из чертежа находим значения $y_{\infty i}$ (в см) $y_{\infty 1} = 2,8$ см; $y_{\infty 2} = 16$ см. (На рис. 41 чертеж воспроизведен с уменьшением.)

С помощью табл. 2 определяем:

$$\eta_{\infty 1} = 2,04; \quad \eta_{\infty 2} = 1,12.$$

$$4. \quad m_1 = \frac{\sqrt{\eta_{\infty 1}^2 - 1}}{\eta_{\infty 1}} = \frac{\sqrt{2,04^2 - 1}}{2,04} = 0,87;$$

$$m_2 = \frac{\sqrt{\eta_{\infty 2}^2 - 1}}{\eta_{\infty 2}} = \frac{\sqrt{1,12^2 - 1}}{1,12} = 0,45.$$

Таким образом, фильтр состоит из двух звеньев типа m . Результат расчета практически не отличается от полученного в примере 21 аналитическим способом.

Если фильтр должен иметь характеристическое сопротивление типа Z_{Tm} или $Z_{\Pi m}$ и величина $m = m_1$ найдена ранее, то четвертый пункт расчета начинаем с того, что

строим график характеристического затухания звена, имеющего параметр $m = m_1$. Для этого определяем величину

$$\eta_{\infty 1} = \frac{1}{\sqrt{1 - m_1^2}},$$

а зная ее, по таблице находим $y_{\infty 1}$. Можно определить $y_{\infty 1}$ непосредственно по формуле

$$y_{\infty 1} = -20 \ln m_1. \quad (171)$$

Совместив начало оси симметрии шаблона с точкой чертежа $y = y_{\infty 1}$, строим график затухания звена. И только после этого производим выбор всех остальных звеньев с таким расчетом, чтобы их суммарное затухание (включая затухание звена с $m = m_1$) на отрезке $y_3 - y_4$ не падало ниже величины a_{\min} .

Дальнейший порядок расчета не отличается от рассмотренного выше.

При составлении схемы фильтра необходимо звено с $m = m_1$ разбить на два полувзена и включить их на входе и выходе фильтра.

Работая с шаблоном, полезно иметь в виду следующее.

1. Проводя кривые затухания звеньев в области левее $y = y_3$ и суммируя их, мы определяем характеристическое затухание фильтра в переходной полосе. Следовательно, такое построение имеет физический смысл. А проводить кривые затухания звеньев и суммировать их в области правее $y = 0$ бессмысленно, ибо точка $y = 0$ соответствует значению $\eta = \infty$.

2. Для построения графика характеристического затухания звена типа k необходимо ось симметрии шаблона совместить с осью чертежа $y = 0$ (кривая имеет полюс при $y = 0$).

3. Если решено включить в схему фильтра два или три звена с одинаковым коэффициентом m , то при суммировании ординат кривых следует ординаты соответствующего звена удваивать или утраивать.

4. Чтобы получить шаблон затухания Г-образного звена, следует уменьшить вдвое ординаты шаблона затухания Т- или П-образного звена.

5. Переходя от масштаба y к масштабу η , легко построить зависимость $a=\varphi(\eta)$ для любого звена и всего фильтра в целом.

22. Шаблон характеристической фазовой постоянной

Построение графика частотной зависимости характеристической фазовой постоянной фильтра в полосе пропускания можно существенно облегчить, воспользовавшись специальным шаблоном [Л. 8]. Введем вместо нормированной частоты η новую переменную

$$x = \ln \frac{\eta}{V_{1-\eta^2}} \quad (172)$$

После такой замены формула для определения характеристической фазовой постоянной Т- или П-образного звена приобретает вид:

$$b = 2 \operatorname{arctg} e^{x-y_\infty}, \quad (173)$$

где, как и прежде,

$$y_\infty = \ln \frac{\eta_\infty}{V_{\eta_\infty^2 - 1}} = \ln \frac{1}{m}. \quad (174)$$

Из (173) следует, что в масштабе «частоты» x величина b при любом значении m (или y_∞) зависит только от разности $x-y_\infty$. Поэтому зависимость $b=\varphi(x)$ для любого значения m можно построить с помощью одного и того же шаблона, представляющего собой (в определенном масштабе) график функции

$$b = 2 \operatorname{arctg} e^x. \quad (175)$$

Форма шаблона показана на рис. 42,а. Легко видеть, что в результате преобразования (172) нормированная частота $\eta=0$ преобразуется в величину $x=-\infty$, а $\eta=1$ — в величину $x=+\infty$. Чтобы перемещение по оси x слева направо соответствовало увеличению нормированной и абсолютной частоты, следует откладывать положительные значения x вправо от начала координат, а отрицательные значения — влево.

Для построения графика фазовой постоянной звена при $m = m_i$ необходимо определить по формуле (174) величину $y_{\infty i}$, приложить основание шаблона к оси x чертежа, совместить точку A основания шаблона (соответствующую величине $b = \frac{\pi}{2} \text{ рад}$) с абсциссой $x = y_{\infty}$ и обвести шаблон карандашом. (Поясним, что при $m < 1$ точка A шаблона будет расположена справа от точки $x = 0$.)

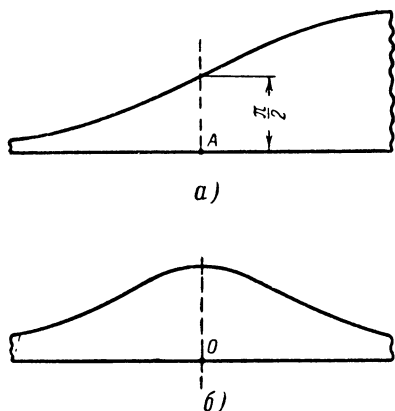


Рис. 42. Шаблон характеристической фазовой постоянной (а) и шаблон времени задержки (б).

Рекомендуемый масштаб для шаблона и графиков фазовой постоянной: 10 см оси абсцисс чертежа соответствуют величине $\Delta x = 1$ (т. е. одной единице x), 1 см оси ординат соответствует углу $\Delta b = \pi/4 \text{ рад}$.

Данные для построения шаблона в таком масштабе приведены в табл. 4. В первом столбце указаны значения переменной x , во втором столбце — расстояние в сантиметрах от точки A шаблона (положительные

значения x откладываем вправо от точки A , а отрицательные — влево), в третьем столбце — величина характеристической фазовой постоянной в сантиметрах шаблона.

Для перехода от величин переменной η к величинам переменной x и обратно служит табл. 5. Заметим, что откладывая на оси x величину y_{∞} , следует применять для одной ее единицы такой же масштаб, как и для одной единицы x : 10 см на чертеже соответствуют величине $\Delta y = 1$. Следовательно, при переходе от величин η к величинам y (см) с помощью табл. 2 следует уменьшить приведенные в табл. 2 величины y в два раза.

Разумеется, в зависимости от цели и требуемой точности расчета могут быть выбраны иные, по сравнению с рекомендуемыми, масштабы как для оси абсцисс, так и для оси ординат графика и шаблона.

23. Шаблон времени задержки звена

В инженерной практике встречается задача расчета фильтра, имеющего заданную частотную зависимость времени задержки t_3 в полосе пропускания. При решении ее может оказаться полезным специальный шаблон.

Временем задержки или временем замедления t_3 называется величина

$$t_3 = \frac{db}{d\omega}.$$

В соответствии с принятыми ранее обозначениями находим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (2 \operatorname{arctg} e^{x-y_\infty}) &= \frac{2e^{x-y_\infty}}{1 + e^{2(x-y_\infty)}} = \frac{1}{\operatorname{ch}(x-y_\infty)}; \\ \frac{db}{d\omega} &= \frac{db}{dx} \frac{dx}{d\eta} \frac{d\eta}{d\omega} = \frac{1}{\operatorname{ch}(x-y_\infty)} \frac{1}{\eta(1-\eta^2)\omega_c}. \end{aligned} \quad (176)$$

При каскадном соединении N звеньев суммарное время задержки равно:

$$t_{3.\text{общ}} = \frac{1}{\eta(1-\eta^2)\omega_c} \sum_{v=1}^N \frac{1}{\operatorname{ch}(x-y_{\infty v})}. \quad (177)$$

Обозначив

$$\eta(1-\eta^2) = K(\eta),$$

получим:

$$t_{3.\text{общ}} K(\eta) \omega_c = \sum_{v=1}^N \frac{1}{\operatorname{ch}(x-y_{\infty v})}. \quad (178)$$

При известных величинах $y_{\infty v}$ частотную зависимость суммы, образующей правую часть равенства (178), легко найти, складывая ординаты кривых, построенных с помощью одного и того же шаблона. Этот шаблон (см. рис. 42,б) должен представлять собой (в любом выбранном масштабе) график функции

$$Z(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}.$$

Таблица 6 содержит данные для изготовления шаблона в масштабе: единица оси x соответствует 10 см чертежа, единица оси Z соответствует также 10 см чертежа. Так как $\operatorname{ch} x$ является четной функцией x , то в таблице приведены значения $Z(x)$ только для положительных значений x .

Время замедления $t_{з. \text{общ}}$ при известных ω_c и y_{∞} определяем следующим образом:

1. Пересчитываем граничные частоты η_1 и η_2 интересующего нас диапазона частот в масштаб x и наносим обе точки на горизонтальную ось графика.

2. Для каждого из N звеньев с помощью шаблона строим кривую

$$Z(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(x - y_{\infty})},$$

для чего совмещаем точку, соответствующую нулевой абсциссе шаблона (и, очевидно, максимальной его ординате), с точкой x_v горизонтальной оси графика, абсцисса которой равна

$$x_v = y_{\infty},$$

и обводим шаблон карандашом.

3. Суммируем ординаты построенных кривых в нескольких точках оси x .

4. Разделив сумму, вычисленную (в единицах оси Z) для некоторой точки оси x , на соответствующее этой точке значение функции $K(\eta)$, получим величину $t_{з. \text{общ}} \omega_c$ (для данной частоты). Если же сумму разделить на величину $K(\eta) \omega_c$, то получим значение $t_{з. \text{общ}}$.

Особенно полезным может оказаться шаблон при синтезе четырехполюсника по заданной частотной зависимости времени замедления $t_{з. \text{общ}} = \Phi(f)$. Можно рекомендовать такой порядок синтеза:

1. Задаемся значением предельной частоты ω_c , исходя из известного общего характера кривых $t_{з. \text{общ}} = \Phi(\eta)$.

2. Вычисляем и строим в системе координат (x, Z) в выбранном масштабе зависимость $Z(x) = t_{з. \text{общ}} \omega_c K(\eta)$.

3. Перемещая шаблон вдоль оси x построенного графика, находим такие его положения, чтобы, обведя шаблон в каждом из найденных положений карандашом и просуммировав для ряда точек оси x ординаты

кривых, получить суммарную кривую, возможно лучше совпадающую с заданной зависимостью $Z(x)$.

4. Зная абсциссы x_v точек оси графика, соответствующих максимальной ординате каждого из положений шаблона, и вспоминая, что в точке с максимальной ординатой абсцисса равна

$$x_v = y_{\text{ов}},$$

находим из (174) величину m_v каждого звена.

5. Если максимальное значение полученной на втором этапе расчета функции $Z(x)$ превышает 4—5 единиц, то полезно уменьшить все ее значения в некоторое целое число раз n так, чтобы максимальное значение полученной функции составляло 1,5—2, осуществить синтез по полученной кривой и увеличить в n раз найденное число звеньев. Далее определяют разность между заданной и полученной зависимостью $Z(x)$ и снова подбирают соответствующие звенья.

24. Потери в элементах фильтра

Наличие необратимых тепловых потерь в катушке индуктивности можно отразить на эквивалентной схеме, включив последовательно с индуктивностью L активное сопротивление r_L (рис. 43, а). Если при отсутствии потерь сопротивление катушки переменному току выражалось формулой

$$z_L = j\omega L,$$

то при наличии потерь оно станет равно величине

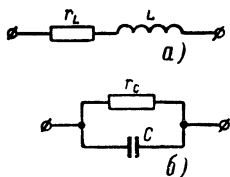


Рис. 43. Сопротивления потерь в элементах фильтра.

$$z_L = j\omega L + r_L = j\omega \left(1 - j \frac{r_L}{\omega L}\right) L \quad (179)$$

Тепловые потери в конденсаторе удобно отразить на эквивалентной схеме, включив активное сопротивление r_C параллельно емкости C (рис. 43, б).

Если при отсутствии потерь проводимость конденсатора была равна

$$y = j\omega C,$$

то при наличии потерь она становится равной

$$y_c = j\omega C + r_c = j\omega \left(1 - j \frac{r_c}{\omega C}\right) C. \quad (180)$$

Введем обозначения:

$$\frac{r_L}{\omega L} = d_L, \quad \frac{r_C}{\omega C} = d_C.$$

Величины d_L и d_C называются, соответственно, коэффициентом затухания катушки и конденсатора. Коэффициент затухания — величина, обратная добротности:

$$d_L = \frac{1}{Q_L}; \quad d_C = \frac{1}{Q_C}.$$

С учетом принятых обозначений формулы сопротивления катушки и конденсатора приобретают вид:

$$z_L = j\omega (1 - jd_L) L = j\omega'_L L;$$

$$y_C = j\omega (1 - jd_C) C = j\omega'_C C,$$

где

$$\omega'_L = \omega (1 - jd_L),$$

$$\omega'_C = \omega (1 - jd_C).$$

Таким образом, при наличии потерь в элементах схемы действительный множитель ω при величине индуктивности L и емкости C заменяется соответственно комплексным множителем ω'_L и ω'_C .

Обычно величины d_L и d_C отличаются друг от друга ($d_L > d_C$). Следовательно, ω'_L и ω'_C могут иметь неодинаковую величину при одной и той же частоте ω . Это обстоятельство усложняет анализ расчета фильтров спотерями.

Но величины ω'_L и ω'_C входят в формулы характеристических параметров a и b в виде произведения, и это

дает возможность ввести в формулы (с целью их упрощения) вместо множителей ω'_L и ω'_C множитель

$$\begin{aligned}\omega' &= \sqrt{\omega'_L \omega'_C} = \omega [(1 - jd_L)(1 - jd_C)]^{\frac{1}{2}} \approx \\ &\approx \omega [1 - j(d_L + d_C)]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Приближенное равенство является достаточно точным, потому что в реальных элементах фильтра $d_L \ll 1$ и $d_C \ll 1$. Применяя к полученному выражению формулу бинома Ньютона и ограничиваясь первыми двумя членами разложения (по причине малой величины суммы всех остальных членов), получим:

$$\omega' = \omega \left[1 - j \frac{1}{2} (d_L + d_C) \right]. \quad (181)$$

После замены ω величиной ω' выражение для нормированной частоты приобретает вид:

$$\begin{aligned}\frac{\omega'}{\omega_0} &= \frac{\omega \left[1 - j \frac{1}{2} (d_L + d_C) \right]}{\omega_0} = \eta \left[1 - j \frac{1}{2} (d_L + d_C) \right] = \\ &= \eta + \Delta\eta = \eta',\end{aligned} \quad (182)$$

где $\Delta\eta = -j \frac{1}{2} (d_L + d_C) \eta$ — приращение нормированной

частоты. Таким образом, замена величины ω на ω' в исходных формулах приводит к замене η на η' в окончательных расчетных формулах.

Как отразится наличие потерь на величине характеристической постоянной передачи фильтра $g(\eta)$ в полюсе пропускания? Для ответа на этот вопрос заменим в формуле $g(\eta)$ величину η на η' и разложим функцию $g(\eta')$ в ряд Тейлора:

$$g(\eta') = g(\eta + \Delta\eta) = g(\eta) + \frac{dg}{d\eta} \Delta\eta + \frac{1}{2} \frac{d^2g}{d\eta^2} (\Delta\eta)^2 + \dots$$

Ограничиваясь первыми двумя членами разложения ($\Delta\eta \ll 1$) и учитывая, что в полосе пропускания фильтра $a(\eta) = 0$, получим:

$$\begin{aligned} g(\eta') &\approx a(\eta) + jb(\eta) + \left(\frac{da}{d\eta} + j \frac{db}{d\eta} \right) \left[-j \frac{1}{2} (d_L + d_C) \eta \right] = \\ &= \frac{1}{2} (d_L - d_C) \eta \frac{db}{d\eta} + jb(\eta). \end{aligned} \quad (183)$$

Итак, наличие потерь практически не отразилось на величине характеристической фазовой постоянной, но привело к тому, что характеристическое затухание фильтра (действительное слагаемое в правой части формулы) стало равно величине

$$a_n(\eta) = \frac{1}{2} (d_L - d_C) \eta \frac{db}{d\eta}. \quad (184)$$

При расчетах по этой формуле следует иметь в виду, что величины r_L и r_C сами определенным образом зависят от частоты. Эту зависимость легко получить экспериментально, выполнив ряд измерений.

Опыт показывает, что в пределах диапазона частот порядка двух-трех октав¹ величины r_L и r_C во многих случаях можно считать постоянными. Такое предположение упрощает расчет.

Рассмотрим некоторые варианты формулы (184).

а) подставляя в (184) значение η , получим:

$$a_n(\eta) = \frac{1}{2} \left(\frac{r_L}{\omega_c L} + \frac{r_C}{\omega_c C} \right) \frac{db}{d\eta}. \quad (185)$$

б) Для перехода от нормированных значений частоты к абсолютным необходимо умножить величину η на ω_c , после чего (184) приобретает вид:

$$a_n(\omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{r_L}{\omega_c L} + \frac{r_C}{\omega_c C} \right) \omega_c \frac{db}{d\eta} \frac{d\eta}{d\omega}. \quad (186)$$

В свою очередь

$$\frac{d\eta}{d\omega} = \frac{1}{\omega_c}$$

¹ Октавой называют диапазон частот, у которого отношение верхней граничной частоты к нижней равно 2.

и, следовательно, (186) фактически не отличается от (185).

в) Из (186) получаем:

$$a_{\Pi}(\omega) = \frac{1}{2} (\tau_L + \tau_C) \frac{db}{d\eta} \frac{d\eta}{d\omega}, \quad (187)$$

где $\tau_L = \frac{r_L}{L}$; $\tau_C = \frac{r_C}{C}$ — постоянные времени катушки и конденсатора.

Для одного звена типа m фильтра нижних частот

$$\frac{db}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \left(2 \operatorname{arctg} m \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \right) = \frac{2m}{[1 - (1-m^2)\eta^2] \sqrt{1-\eta^2}},$$

и расчетные формулы приобретают вид:

$$a_{\Pi}(\eta) = \left(\frac{r_L}{\omega_c L} + \frac{r_C}{\omega_c C} \right) \frac{m}{[1 - (1-m^2)\eta^2] \sqrt{1-\eta^2}}, \quad (188)$$

или

$$a_{\Pi}(\omega) = \frac{(\tau_L + \tau_C) m}{[1 - (1-m^2)\eta^2] \sqrt{1-\eta^2} \omega_c}. \quad (189)$$

Обе формулы справедливы в диапазоне частот $0 \leq \eta \leq [1 - (d_L + d_C)]$. Величиной d_C чаще всего можно пренебречь по сравнению с d_L .

Для каждого из звеньев величина $db/d\eta$ возрастает по мере приближения частоты к предельной и тем круче, чем меньше параметр m . Так же ведет себя и величина характеристического затухания a_{Π} , обусловленного потерями в элементах звена.

Затухание фильтра, составленного из N согласованно соединенных звеньев, в полосе пропускания равно сумме затуханий всех звеньев:

$$a_{\Pi\Sigma} = a_{\Pi 1} + a_{\Pi 2} + \dots + a_{\Pi N} = (d_L + d_C) S, \quad (190)$$

где

$$S = \sum_{v=1}^N \frac{m_v}{[1 - (1-m_v^2)\eta^2] \sqrt{1-\eta^2}},$$

а величины d_L и d_C соответствуют предельной частоте фильтра f_c .

Появление характеристического затухания, обусловленного наличием потерь, приводит к соответствующему увеличению рабочего затухания в полосе эффективно пропускаемых частот. Величина a в формуле (81) становится равной $a_{п.э.}$. Поэтому, задавая требования к фильтру с учетом потерь в его элементах, под величиной $a_{р.макс}$ следует подразумевать сумму характеристического затухания $a_{п.э.}$, обусловленного потерями в элементах, и затухания $a_{р.н.}$, обусловленного рассогласованием и равного сумме трех последних слагаемых в правой части формулы (81):

$$a_{р.макс} = a_{п.э.} + a_{р.н.} \quad (191)$$

Конструктор, основываясь на предыдущем опыте и на результатах прикидочных расчетов, разбивает величину $a_{р.макс}$ на два слагаемых. Рекомендуются принимать

$$a_{р.н.} = 0,3a_{р.макс},$$

если величина $a_{р.н.}$ не ограничена никакими иными условиями (например, заданной величиной $a_{эхо\ мин}$ или ΔZ_C). После определения количества и типа звеньев фильтра можно при заданной добротности элементов Q вычислить величину $a_{п.э.}$. Если последняя превышает допустимую величину, то это чаще всего свидетельствует о необходимости увеличения добротности Q .

Заметим, что величину затухания звена в полосе пропускания при наличии потерь в элементах можно определить также с помощью специальной номограммы. Такая номограмма приведена в § 31.

Пример 23. Определить минимально допустимую величину добротности Q катушек фильтра, рассчитанного в примерах 19 и 21, на частоте f_c , если рабочее затухание в полосе эффективно пропускаемых частот с учетом потерь не должно превышать величины 0,2 *нп*. Наличием потерь в конденсаторах пренебречь.

Решение. 1. Определяем сумму (S) величин

$$\frac{m}{[1 - (1 - m^2)\eta^2] \sqrt{1 - \eta^2}}$$

для обоих звеньев фильтра, приняв $\eta = \eta_2$:

$$S = 2,21 + 2,64 = 4,85.$$

2. Ранее было задано $a_{р.н.} = 0,08$ *нп*. Из формулы (191)

$$a_{п.э.} = a_{р.макс} - a_{р.н.} = 0,2 - 0,08 = 0,12 \text{ нп.}$$

3 На основании (188) и (190)

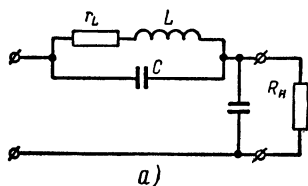
$$d_L + d_C = \frac{a_{п.э}}{S} = \frac{0,12}{4,85} = 0,0247.$$

По условию

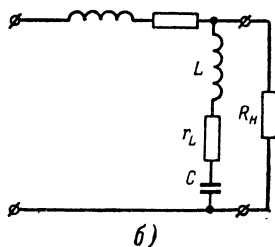
$$d_C = 0; \quad Q_L = \frac{1}{d_L} = \frac{1}{0,0287} = 40,5.$$

Подчеркнем, что в соответствии с (188) получена величина добротности при частоте $f = f_c$.

В полосе задерживания наличие потерь в элементах заметно сказывается на величине характеристического затухания только на частоте бесконечно большого затухания звена.



а)



б)

Рис. 44. К влиянию сопротивления потерь катушки на величину затухания звена при $\eta = \eta_\infty$.

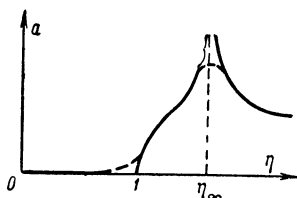


Рис. 45. Частотная зависимость характеристического затухания звена при отсутствии потерь в элементах (сплошная линия) и при наличии потерь в элементах (штриховая линия).

Действительно, при отсутствии потерь ($r_L = 0$) сопротивление параллельного контура в схеме рис. 44, а имеет на резонансной частоте бесконечно большую величину, что эквивалентно обрыву ветви с контуром на частоте резонанса.

При наличии потерь в катушке индуктивности сопротивление параллельного контура равно не бесконечности, а конечной величине:

$$z_p = \frac{L}{Cr_L}.$$

Поэтому часть энергии, поступающей на вход звена, попадает на выходные зажимы последнего.

В случае схемы рис. 44,б сопротивление последовательного контура на резонансной частоте при отсутствии потерь равно нулю и весь входной ток замыкается через ветвь с последовательным контуром. При наличии потерь в катушке сопротивление последовательного контура на резонансной частоте равно не нулю, а величине r_L , и поэтому часть входного тока протекает через выходные зажимы звена. В обоих случаях величина затухания звена на частоте полюса затухания может быть найдена по формуле

$$a_{\infty l} = \ln 4Q (\eta_{\infty l}^2 - 1) = \ln 4Q \frac{m_i^2}{1 - m_i^2}, \quad (192)$$

где

$$Q = \frac{1}{d_L + d_C}.$$

Примерный вид зависимости $a = \varphi(\eta)$ звена типа m при наличии потерь показан на рис. 45 штриховой линией.

Характеристическое сопротивление фильтра при наличии потерь в элементах приобретает в полосе пропускания небольшую мнимую составляющую, а в полосе задерживания — небольшую действительную составляющую. Но влиянием потерь на величину характеристического сопротивления, как правило, можно пренебречь.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ФИЛЬТРЫ ВЕРХНИХ ЧАСТОТ, ПОЛОСОВЫЕ И ЗАГРАЖДАЮЩИЕ

25. Фильтры верхних частот

Исследуя графическим способом характер зависимости $\frac{z_1}{z_2} = \varphi(\omega)$ для реактивного четырехполюсника (рис. 46,а), убеждаемся, что в диапазоне частот от нуля до некоторой частоты $\omega = \omega_c$ он имеет полосу задерживания (см. рис. 46,б), а в диапазоне частот от $\omega = \omega_c$ до $\omega = \infty$ — полосу пропускания. Произведение сопротивлений z_1 и z_2 не зависит от частоты и равно постоянной величине:

$$z_1 z_2 = \frac{L}{C} = R^2,$$

где

$$R = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Таким образом, рассматриваемый четырехполюсник является фильтром верхних частот типа *k*.

Подобно тому, как это было сделано для Г-образного звена фильтра нижних частот, можно найти формулы частотной зависимости характеристических пара-

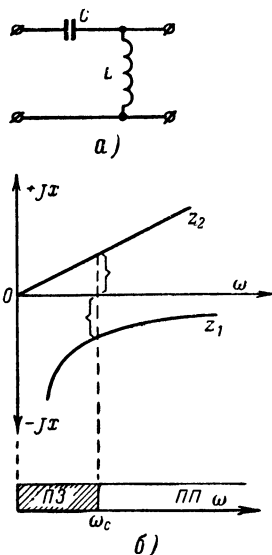


Рис. 46. Г-образное звено типа *k* фильтра верхних частот (а) и графическое определение полосы пропускания этого звена (б).

метров Г-образного звена фильтра верхних частот:

$$Z_T = R \sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}}; \quad (193)$$

$$Z_{\Pi} = \frac{R}{\sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}}}; \quad (194)$$

$$\text{th } g_{\Gamma} = \frac{\frac{1}{\eta}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}}}, \quad (195)$$

где по-прежнему $\eta = \frac{f}{f_c}$.

Сравнивая эти формулы с найденными ранее для звена типа k фильтра нижних частот, убеждаемся, что те и другие имеют одинаковую структуру. Только при переходе от формул для фильтров нижних частот к формулам для фильтров верхних частот величина η заменяется величиной $1/\eta$.

В результате частотные зависимости характеристического затухания в полосе задерживания и характеристических сопротивлений в полосе пропускания фильтра верхних частот можно рассматривать как зеркальное отражение соответствующих зависимостей фильтра нижних частот относительно оси $\eta = 1$. При этом точка $\eta = 0$ характеристик фильтров нижних частот переходит в точку $\eta = \infty$ характеристик фильтров верхних частот, и наоборот.

Указанное свойство не распространяется на графики зависимостей $Z_C = \varphi_1(\eta)$ в полосе задерживания и $b = \varphi_2(\eta)$ в полосе пропускания. Правильно выбрать знак перед корнем при вычислении этих параметров можно, руководствуясь приведенными на рис. 47 графиками частотных зависимостей характеристических параметров Г-образного звена фильтра верхних частот.

Из двух Г-образных звеньев типа k можно составить Т- или П-образное звено типа k . Заметим, что у такого звена величина b составляет в полосе задерживания $(-\pi)$ рад.

Из звена типа k можно образовать последовательно-производное или параллельно-производное звено типа m , основываясь на тех же принципах и соображениях, что и в случае фильтров нижних частот.

Расчет фильтра верхних частот осуществляется по тем же формулам и в такой же последовательности, как и расчет фильтра нижних частот, только вместо величины η следует во всех формулах поставить величину $1/\eta$.

Можно рекомендовать иной вариант: при расчете фильтра ВЧ во всех формулах, полученных ранее для расчета фильтра НЧ, заменить величину η величиной $\eta_{\text{в}}$:

$$\eta_{\text{в}} = \frac{f_c}{f} = \frac{\omega_c}{\omega}. \quad (196)$$

В дальнейшем необходимо помнить о разнице между нормированными частотами η и $\eta_{\text{в}}$ [сравните формулы (30) и (196)] и переход от нормированной частоты $\eta_{\text{в}}$ к абсолютной частоте f или ω выполнять в соответствии с формулой (196).

После определения параметров R и f_c можно определить величины элементов Г-образного звена по формулам:

$$L = \frac{R}{\omega_c}, \quad (197)$$

$$C = \frac{L}{R^2} = \frac{1}{\omega_c R}. \quad (198)$$

Величины элементов звеньев типа m определяем, зная параметры L , C и m , с помощью рис. 48, на котором показаны схемы звеньев фильтров верхних частот

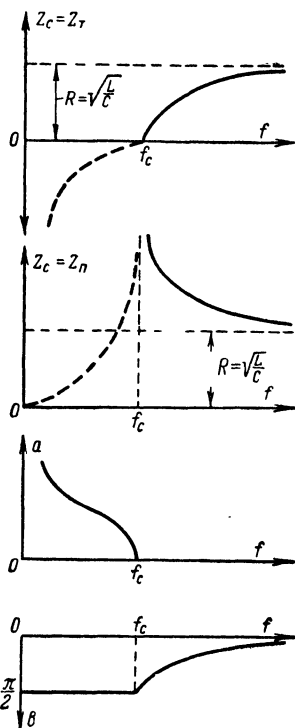


Рис. 47. Частотные зависимости характеристических параметров Г-образного звена типа k фильтра верхних частот.

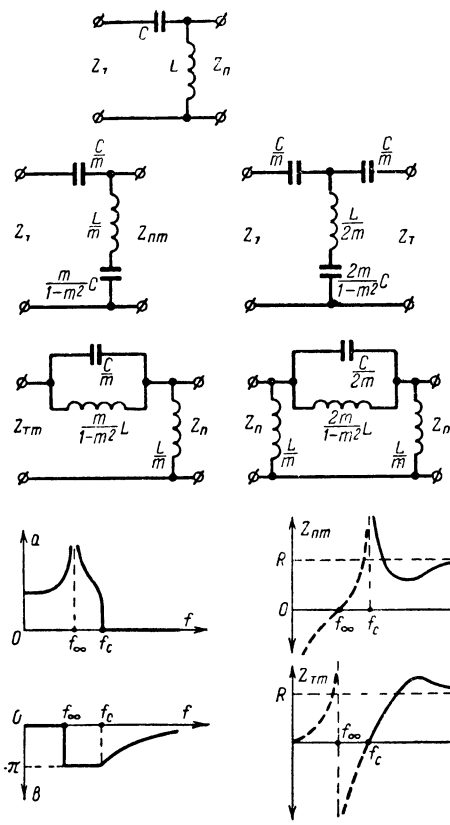


Рис. 48. Схемы некоторых звеньев фильтров верхних частот и частотные зависимости их характеристических параметров.

и графики частотных зависимостей характеристических параметров Т- и П-образного звеньев.

Еще один способ и некоторые вопросы расчета фильтров верхних частот рассмотрены в следующем параграфе.

26. Преобразование частоты

В предыдущих главах мы подробно исследовали свойства звеньев типов k и m фильтров нижних частот. Но для расчета фильтров верхних частот нам пришлось

повторять исследование, по существу, с самого начала. Казалось бы, то же самое предстоит сделать при анализе и расчете полосовых и иных фильтров.

Между тем в современной теории цепей известен метод, который позволяет свести расчет любого фильтра (верхних частот, полосового, режекторного) к расчету фильтра нижних частот. Метод называется преобразованием частоты. Математические основы метода сводятся к следующему.

Исследуя воздействие на электрическую цепь синусоидальной э. д. с. в установившемся режиме, принято записывать величины сопротивлений в комплексной форме, как функции оператора $j\omega$. Например, выражение полного сопротивления последовательно соединенных индуктивности L , активного сопротивления R и емкости C при записи в комплексной форме имеет вид:

$$z(j\omega) = j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}.$$

Наряду с комплексной формой записи существует более общая операторная форма записи, при которой сопротивление является функцией не мнимого оператора $j\omega$, а оператора p , являющегося комплексной величиной:

$$z(p) = pL + R + \frac{1}{pC}, \quad (199)$$

где

$$p = \sigma + j\omega. \quad (200)$$

Операторное сопротивление $Z(p)$ можно рассматривать как отношение преобразованной по Лапласу функции напряжения, приложенного к зажимам некоторого двухполюсника, к преобразованной по Лапласу функции тока, проходящего через зажимы этого двухполюсника (при нулевых начальных условиях).

Сравнивая три последние формулы, приходим к заключению, что комплексная форма записи является только частным случаем операторной формы. Записывая сопротивления в операторной форме, мы получаем возможность исследовать характеристики цепи при любых значениях комплексной переменной p или, как говорят, во всей комплексной плоскости p (рис. 49). Такой анализ часто оказывается весьма полезным, хотя всем воз-

можным реальным значениям частоты (от 0 до ∞) синусоидального напряжения с постоянной амплитудой соответствует только положительная мнимая полуось ($\sigma=0$; $\omega>0$) комплексной плоскости p .

Интересующая нас задача (синтез фильтров верхних частот полосовых и заграждающих), решается с помощью таких преобразований частоты, при которых не требуется исследовать свойства и характеристики цепи во всей плоскости комплексного переменного p . Но, с другой стороны, мы не сможем ограничиться изучением

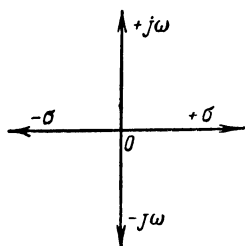


Рис. 49. Плоскость комплексного переменного p .

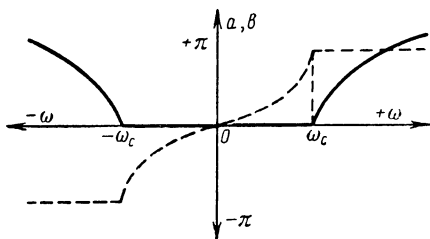


Рис. 50. Зависимости $a=\varphi_1(\omega)$ и $b=\varphi_2(\omega)$ фильтра нижних частот, соответствующие положительной и отрицательной полуосям переменной ω .

характеристик цепи (звена) только для значений p , лежащих на положительной мнимой полуоси. Мы будем рассматривать характеристики звеньев фильтра при значениях p , соответствующих всей мнимой оси, иными словами, соответствующих не только положительным, но и отрицательным значениям ω . Разумеется, физический смысл будут иметь только те характеристики и параметры, которые соответствуют положительным значениям частоты ω .

В теории электрических цепей [Л. 4] доказывается важное свойство параметров пассивного четырехполюсника: *действительная часть любого параметра пассивного четырехполюсника является четной функцией частоты ω , мнимая часть параметра является нечетной функцией частоты*. Иными словами, при изменении знака частоты ω знак действительной части параметра не меняется, а знак мнимой части меняется на обратный. Это свойство относится, в частности, к таким параметрам, как вход-

ное и характеристическое сопротивление, характеристическая и рабочая постоянная передачи и т. д.

Учитывая сказанное, частотную зависимость характеристической постоянной передачи фильтра нижних частот вдоль всей оси $j\omega$ (т. е. для положительных и отрицательных значений ω) можно изобразить так, как показано на рис. 50, где сплошной линией показана частотная зависимость характеристического затухания a (действительная часть величины $g=a+jb$), а штриховой линией — зависимость характеристической фазовой постоянной b (мнимая часть величины g).

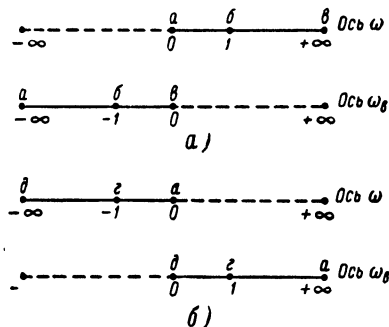


Рис. 51. К преобразованию оси ω в ось $\omega_{\text{в}}$.

Предположим, что в формулах частотной зависимости характеристических параметров фильтра нижних частот мы произвели замену переменной по формуле

$$j\omega \rightarrow \frac{1}{j\omega_{\text{в}}}. \quad (201)$$

Легко видеть, что при этом точка с абсциссой «1» оси ω преобразуется в точку с абсциссой «-1» оси $\omega_{\text{в}}$; точка $\omega=0$ — в точку $\omega_{\text{в}}=-\infty$; точка $\omega=+\infty$ — в точку $\omega_{\text{в}}=0$. Таким образом, положительная полуось переменной ω преобразуется в отрицательную полуось переменной $\omega_{\text{в}}$, как показано на рис. 51, а, где соответствующие друг другу точки осей ω и $\omega_{\text{в}}$ обозначены одинаковыми буквами. В результате замены переменной («преобразования частоты») все характеристики электрической цепи, соответствующие положительной полуоси ω , будут скопированы на отрицательной полуоси переменной $\omega_{\text{в}}$. Полученные характеристики не представляют практического интереса, так как реальным частотам соответствует положительная, а не отрицательная полуось переменной $\omega_{\text{в}}$. Зато, преобразовывая по формуле (201) отрицательные значения переменной ω , мы получим положительные

значения переменной ω , причем точка $\omega=0$ преобразуется в точку $\omega_{\text{в}}=\infty$; $\omega=-1$ — в $\omega_{\text{в}}=1$; $\omega=-\infty$ — в $\omega_{\text{в}}=0$, как показано на рис. 51,б, где соответствующие друг другу точки осей ω и $\omega_{\text{в}}$ обозначены одинаковыми буквами.

Рассмотренное преобразование частоты дает возможность перейти от схемы фильтра нижних частот к схеме фильтра верхних частот. В самом деле, преобразовываемые характеристики фильтра нижних частот, соответствующие отрицательной полуоси переменной ω и являющиеся функцией этой переменной, окажутся скопированными на положительной полуоси переменной $\omega_{\text{в}}$ и, как легко видеть, дадут при этом характеристики фильтра верхних частот, соответствующие реальным (физическим) частотам от 0 до ∞ . Но замена переменной по формуле (201) имеет не только математический смысл, который заключается в переносе характеристик звена с оси ω на ось $\omega_{\text{в}}$. Она имеет вполне определенный физический смысл, ибо свидетельствует об изменении характера реактивного сопротивления элементов схемы, а следовательно, об изменении той схемы, характеристики которой подвергаются преобразованию.

Какому же изменению схемы исходного фильтра нижних частот соответствует замена переменной по формуле (201)? Выражение $j\omega L$ после замены приобретает вид $L/j\omega_{\text{в}}$, что можно рассматривать как сопротивление емкости

$$C_{\text{в}} = \frac{1}{L}. \quad (202)$$

Выражение $1/j\omega C$ после замены становится равным $j\omega_{\text{в}}/C$, что можно рассматривать как сопротивление индуктивности

$$L_{\text{в}} = \frac{1}{C}. \quad (203)$$

Таким образом, замена $j\omega$ на $1/j\omega_{\text{в}}$ в формулах, относящихся к какой-либо цепи, соответствует замене индуктивности на емкость и наоборот в схеме электрической цепи. Сказанное позволяет предложить такой метод расчета фильтров верхних частот. Зная требования к рассчитываемому фильтру верхних частот, формулируем тре-

бования к такому фильтру нижних частот, который можно рассматривать как «низкочастотный аналог» (прообраз, прототип) фильтра верхних частот. Синтезировав схему прототипа, преобразуем ее в схему фильтра верхних частот. Рассмотрим этапы расчета.

1. При задании требований к фильтру верхних частот всю ось действительных (физических) частот от 0 до ∞ разбивают на три участка (см. рис. 52): полосу эффективно пропускаемых частот $f_{в1}—f_{в2}$, переходную полосу $f_{в2}—f_{в3}$ и полосу эффективно задерживаемых частот $f_{в3}—f_{в4}$ (частота $f_{в4}$ может быть равна нулю, но может и отличаться от нуля).

Способы задания требований к фильтрам верхних частот в ПЭПЧ и ПЭЗЧ не отличаются от тех, которые применяются при расчете фильтров нижних частот.

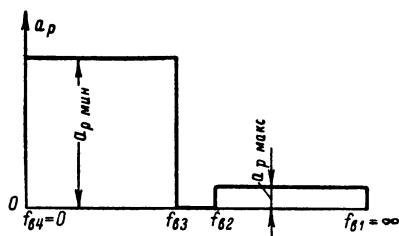


Рис. 52. Деление оси частот на участки при задании требований к фильтру верхних частот.

2. Определяем требования к низкочастотному прототипу. Границы ПЭПЧ и ПЭЗЧ прототипа равны:

$$f_1 = \frac{1}{f_{в1}}; \quad f_2 = \frac{1}{f_{в2}}; \quad f_3 = \frac{1}{f_{в3}}; \quad f_4 = \frac{1}{f_{в4}}.$$

Требования к прототипу в ПЭПЧ остаются такими же, как и к ПЭПЧ рассчитываемого фильтра верхних частот. Требования к ПЭЗЧ прототипа — такие же, как к ПЭЗЧ фильтра верхних частот.

Синтезируем схему фильтра нижних частот (прототипа) любым из способов. Не следует смущаться низким значением предельной частоты ($\omega_c \ll 1$) прототипа и соответственно необычно большими величинами индуктивностей и емкостей.

4. Каждую индуктивность L_i в схеме прототипа заменяем емкостью

$$C_{вi} = \frac{1}{L_i},$$

каждую емкость C_i — индуктивностью

$$L_{vi} = \frac{1}{C_i}.$$

В результате будет получена искомая схема фильтра верхних частот.

5. Любой из параметров рассчитанного фильтра верхних частот на частоте ω_{vi} будет равен соответствующему параметру прототипа, вычисленному на частоте $\omega = -1/\omega_{vi}$. Однако, зная предельную частоту фильтра верх-

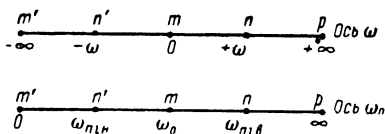


Рис. 53. К преобразованию оси ω в ось $\omega_{п}$.

них частот $\omega_{вс} = 1/\omega_c$, где ω_c — предельная частота прототипа, можно определить все интересующие нас параметры фильтра непосредственно по формулам, данным в предыдущем параграфе.

Теперь рассмотрим преобразование переменной ω в переменную $\omega_{п}$, осуществляемое по формуле

$$j\omega \rightarrow \frac{\omega_0^2 - \omega_{п}^2}{j\omega_{п}}, \quad (204)$$

где ω_0 — некоторая произвольная постоянная величина, не равная нулю или бесконечности. Наша задача — определить, какая часть оси переменной ω преобразуется в положительную полуось переменной $\omega_{п}$. С этой целью зададимся несколькими значениями ω и определим из (204) соответствующие значения $\omega_{п}$:

$$а) \quad \omega = 0; \quad \omega_{п} = \pm \omega_0;$$

$$б) \quad \omega = \omega_i,$$

где ω_i — некоторая произвольная положительная частота (см. рис. 53; точка n). Подставляя это значение ω в (204) и решая полученное выражение относительно $\omega_{п}$, получим:

$$\omega_{пi} = \frac{\omega_i}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega_i^2}{4} + \omega_0^2}.$$

Интересующее нас положительное значение $\omega_{\Pi i}$ обозначим символом $\omega_{\Pi i B}$:

$$\omega_{\Pi i B} = \frac{\omega_i}{2} + \sqrt{\frac{\omega_i^2}{4} + \omega_0^2}; \quad (205)$$

$$B) \quad \omega = \infty; \quad \omega_{\Pi} = \infty.$$

Результат преобразования показан на рис. 53. Соответствующие друг другу точки на осях ω и ω_{Π} обозначены одинаковыми буквами.

Из рис. 53 следует, что вся положительная полуось переменной ω преобразуется в часть положительной полуоси переменной ω_{Π} : от $\omega_{\Pi} = \omega_0$ до $\omega_{\Pi} = \infty$.

Проверим результат преобразования отрицательной полуоси ω . Подставляя в (204) значение $\omega = -\omega_i$, получим положительное решение

$$\omega_{\Pi i H} = -\frac{\omega_i}{2} + \sqrt{\frac{\omega_i^2}{4} + \omega_0^2}. \quad (206)$$

(Буквы «в» и «н» в индексах обозначают «верхнюю» и «нижнюю» частоты оси ω_{Π} , полученные в результате преобразования частоты $\omega = \omega_i$.) Значение $\omega = -\infty$ дает $\omega_{\Pi} = 0$ (см. рис. 53).

Таким образом, в результате замены переменной по формуле (204) вся ось переменной ω оказывается преобразованной в положительную полуось переменной ω_{Π} . Если этому преобразованию подвергнуть какую-либо из функций фильтра нижних частот, то график этой функции, соответствующий всей оси ω от $-\infty$ до $+\infty$, окажется полностью повторенным (скопированным) на положительной полуоси ω_{Π} . На рис. 54 в качестве примера показан результат преобразования функции характеристического затухания и характеристической фазовой постоянной звена типа k фильтра нижних частот.

Полученная на оси ω_{Π} функция $a = \varphi(\omega_{\Pi})$ представляет собой частотную зависимость характеристического затухания полосового фильтра. Следовательно, преобразование (204) может служить для перехода от функций фильтра нижних частот к функциям полосового фильтра, что нашло свое отражение в индексе переменной ω_{Π} .

Из (205) и (206) находим:

$$\omega_{\text{пнв}} - \omega_{\text{пнн}} = \omega_i, \quad (207)$$

$$\omega_{\text{пнв}} \omega_{\text{пнн}} = \omega_0^2,$$

откуда

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{\text{гнв}} \omega_{\text{гнн}}}. \quad (208)$$

Учитывая, что частота ω_i была выбрана совершенно произвольно, на основании (207) можно утверждать следующее. Преобразуемый по формуле (204) отрезок $0 - \omega_i$ «низкочастотной» оси ω (где ω_i — любая конечная величина) и полученный в результате преобразования отрезок $\omega_{\text{пнн}} - \omega_{\text{пнв}}$ «полосовой» оси $\omega_{\text{п}}$ имеют одинаковую абсолютную величину при любом значении ω_0 .

Формула (208) дает возможность при заданных требованиях к полосовому фильтру определить частоту ω_0 , без чего нельзя выполнить преобразование. Эта же формула свидетельствует о геометрической симметрии графиков всех параметров фильтра относительно частоты ω_0 .

Геометрическая симметрия означает, что при частоте $\omega_{\text{п}} = n\omega_0$ действительная часть параметра имеет такую же величину, как и при частоте $\omega_{\text{п}} = \omega_0/n$; мнимая часть, имея одинаковый модуль, отличается знаком.

Соотношения (207) и (208) играют важную роль при расчете полосовых фильтров.

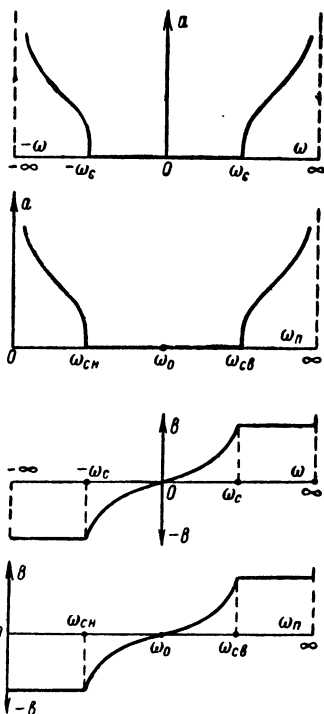


Рис. 54. Преобразование частотной зависимости характеристического затухания и характеристической фазовой постоянной фильтра нижних частот в частотную зависимость характеристического затухания и фазовой постоянной полосового фильтра.

Пример 24. 1. Частотные зависимости параметров фильтра нижних частот преобразуются в частотные зависимости тех же параметров полосового фильтра.

Какова будет у полученного полосового фильтра ширина полосы частот:

а) между нижней $f_{2н}$ и верхней $f_{2в}$ границами полосы эффективно пропускаемых частот;

б) между нижней $f_{сн}$ и верхней $f_{св}$ границами полосы пропускания и

в) между нижней $f_{3н}$ и верхней $f_{3в}$ границами полосы эффективно задерживаемых частот, если у преобразуемого фильтра ниж-

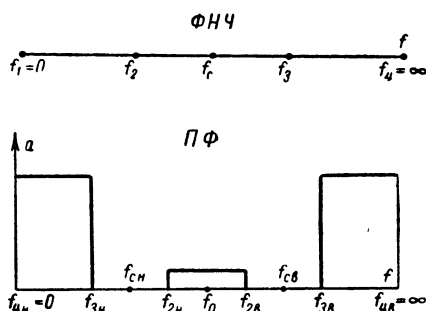


Рис. 55. Деление оси частот на участки при задании требований к полосовому фильтру.

них частот ПЭПЧ составляет $0 \div 1$ кГц, ПЭЗЧ составляет $2 - \infty$ кГц и $f_c = 1,5$ кГц.

Сказанное поясняется рис. 55, на котором для характерных частот ФНЧ сохранены принятые в книге обозначения.

2. Определить частоту f_0 полосового фильтра, если $f_{2н} = 12$ кГц. и $f_{2в} = 16$ кГц.

Какова должна быть при этом частота $f_{3н}$, если $f_{3в} = 20$ кГц?

Решение. 1. В соответствии с формулой (207) имеем:

а) $f_{2в} - f_{2н} = f_2 - 0 = f_2 = 1$ кГц;

б) $f_{св} - f_{сн} = f_c - 0 = f_c = 1,5$ кГц;

в) $f_{3в} - f_{3н} = f_3 - 0 = f_3 = 2$ кГц.

2. По формуле (208) находим:

$$f_0 = \sqrt{f_{2н} f_{2в}} = \sqrt{12 \cdot 10^3 \cdot 16 \cdot 10^3} = 13,88 \text{ кГц};$$

$$f_{3н} = \frac{f_0^2}{f_{3в}} = \frac{(13,88 \cdot 10^3)^2}{20 \cdot 10^3} = 9,6 \text{ кГц}.$$

В заключение выясним, какому изменению схемы электрической цепи соответствует рассматриваемое преобразование. При переходе от переменной ω к переменной

ной ω_{π} формула сопротивления индуктивности L_1 приобретает вид:

$$j\omega L_1 \rightarrow \frac{L_1(\omega_0^2 - \omega^2)}{j\omega}. \quad (209)$$

(В последнем выражении индекс ω у переменной ω_{π} опущен.) Как известно, (209) представляет собой формулу сопротивления последовательного резонансного контура, образованного индуктивностью L_1 и некоторой емкостью C_1 и имеющего резонансную частоту ω_0 . При заданных L_1 и ω_0 емкость C_1 будет равна:

$$C_1 = \frac{1}{\omega_0^2 L_1}. \quad (210)$$

Формула, выражающая сопротивление емкости C_2 , после замены переменной приобретает вид:

$$\frac{1}{j\omega C_2} \rightarrow \frac{j\omega}{C_2(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (211)$$

где в правой части равенства индекс ω у переменной ω_{π} также опущен.

Формула (211) представляет собой частотную зависимость сопротивления параллельного резонансного контура, имеющего резонансную частоту ω_0 и образованного емкостью C_2 и индуктивностью L_2 . При заданных C_2 и ω_0 индуктивность L_2 должна быть равна:

$$L_2 = \frac{1}{C_2 \omega_0^2}. \quad (212)$$

Таким образом, преобразование заданной «низкочастотной» цепи в «полосовую» сводится к замене каждой индуктивности последовательным колебательным контуром, а каждой емкости — параллельным. Существенно, что заменяемый элемент входит в схему соответствующего контура, не меняя своей величины.

27. Расчет полосовых фильтров

Применяя преобразование (204) к звеньям типа k и типа m фильтров нижних частот, внимательный читатель легко может найти схемы и построить любые характери-

стики звеньев типа k и типа m полосовых фильтров. Поэтому мы остановимся только на методике и особенностях расчета полосовых фильтров.

Идея расчета заключается в следующем. По заданным требованиям к полосовому фильтру определяют требования к такому фильтру нижних частот, который может служить «низкочастотным аналогом» или прототипом рассчитываемого полосового. Затем рассчитывают этот фильтр нижних частот (прототип) и подвергают его схему частотному преобразованию (204). Рассмотрим этапы расчета полосового фильтра более подробно.

1. Расчет начинается с проверки и уточнения требований к фильтру. При задании требований к полосовому фильтру всю ось частот делят на пять участков: нижнюю ПЭЗЧ $f_{4н}—f_{3н}$, нижнюю переходную полосу $f_{3н}—f_{2н}$, ПЭПЧ $f_{2н}—f_{2в}$, верхнюю переходную полосу $f_{2в}—f_{3в}$, верхнюю ПЭЗЧ $f_{3в}—f_{4в}$, как показано на рис. 55. В отдельных случаях частота $f_{4н}$ может не быть равной нулю, а $f_{4в}$ — бесконечности. Частоты $f_{2н}$ и $f_{2в}$ назовем нижней и верхней границами ПЭПЧ, частоты $f_{3н}$ и $f_{3в}$ — нижней и верхней внутренними границами ПЭЗЧ, $f_{4н}$ и $f_{4в}$ — нижней и верхней наружными границами ПЭЗЧ. Каждая пара частот должна удовлетворять условию

$$f_{2н}f_{2в}=f_{3н}f_{3в}=f_{4н}f_{4в}=f_0^2. \quad (213)$$

Если заданные частоты не удовлетворяют этому условию, то следует определить параметр f_0^2 по той паре частот, соблюдение требований к которым является наиболее важным. Целесообразно принять $f_0^2=f_{3н}f_{3в}$ и изменить по одной из частот в каждой оставшейся паре так, чтобы выполнялось условие (213).

Требования к полосовому фильтру в ПЭПЧ и ПЭЗЧ задаются так же, как и в случае фильтра нижних частот.

2. Уточнив значения всех шести перечисленных частот, определяем требования к прототипу (низкочастотному аналогу) рассчитываемого фильтра:

- а) нижняя граница ПЭПЧ $f_1=0$ гц;
- б) верхняя граница ПЭПЧ

$$f_2=f_{2в}-f_{2н}; \quad (214)$$

- в) нижняя граница ПЭЗЧ

$$f_3=f_{3в}-f_{3н}; \quad (215)$$

г) верхняя граница ПЭЗЧ

$$f_4 = f_{4в} - f_{4н}; \quad (216)$$

д) величины $a_{р.макс}$, $a_{эхо мин}$ и δ в ПЭПЧ прототипа и $a_{р.мин}$ в ПЭЗЧ прототипа должны иметь ту же величину, что и у рассчитываемого полосового фильтра. То же относится к величинам R_r и R_n . Влияние потерь в элементах на величину характеристического затухания полосового фильтра будет рассмотрено отдельно.

3. По найденным требованиям к прототипу рассчитываем его схему, пользуясь любым известным методом.

4. Получив схему прототипа, подвергаем ее частотному преобразованию, которое практически сводится к тому, что

а) последовательно с каждой индуктивностью L_i не меняя ее величины, включаем емкость $C_i = 1/\omega_0^2 L_i$, где $\omega_0 = 2\pi f_0$, f_0 — в герцах, L_i — в генри, C_i — в фарадах;

б) параллельно каждой емкости C_i , не меняя ее величины, подключаем индуктивность $L_i = 1/\omega_0^2 C_i$. На этом расчет схемы полосового фильтра заканчивается.

5. Любой из параметров полосового фильтра на частоте ω_{pi} будет равен соответствующему параметру прототипа на частоте ω_i , равной

$$\omega_i = \frac{\omega_{pi}^2 - \omega_0^2}{\omega_{pi}}, \quad (217)$$

Формула (217) получена из (204).

Как и следовало ожидать, при $\omega_{pi} > \omega_0$ приходится определять параметры прототипа на положительной полуоси ω , а при $\omega_{pi} < \omega_0$ — на отрицательной полуоси ω .

С другой стороны, зная какой-либо параметр прототипа на частоте ω_i (положительной или отрицательной), можно найти частоту ω_{pi} , на которой соответствующий параметр полосового фильтра имеет такую же величину. Для перехода от переменной ω к переменной ω_{pi} служит формула

$$\omega_{pi} = \frac{\omega_i}{2} + \sqrt{\frac{\omega_i^2}{4} + \omega_0^2}$$

при $\omega > 0$ и

$$\omega_{\text{нн}} = -\frac{\omega_i}{2} + \sqrt{\frac{\omega_i^2}{4} + \omega_0^2}$$

при $\omega < 0$.

Схемы полузвеньев полосового фильтра, полученные в результате преобразования схем параллельно-производного и последовательно-производного полузвеньев

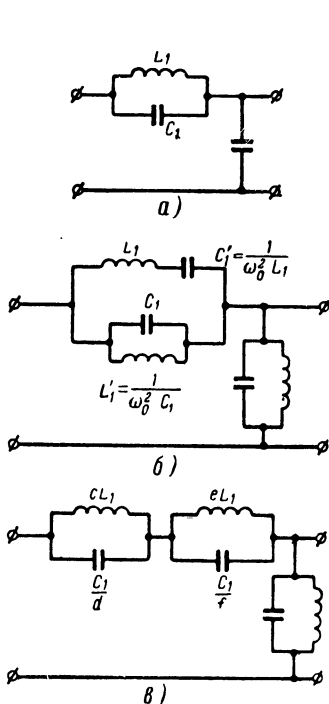


Рис. 56. К синтезу параллельно-производного звена типа m полосового фильтра.

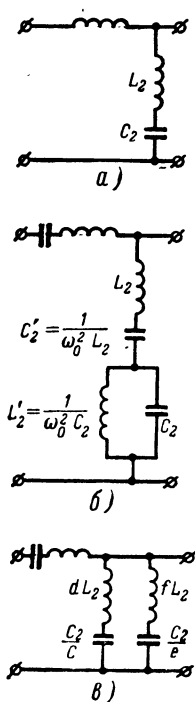


Рис. 57. К синтезу последовательно-производного звена типа m полосового фильтра.

фильтра нижних частот, показаны соответственно на рис. 56 и 57. Одно сопротивление в схеме каждого из полузвеньев является четырехэлементным двухполюсником, другое — двухэлементным. Для получения более

приемлемых, с конструктивной точки зрения, величин элементов в схеме фильтра можно заменить полученные четырехэлементные двухполюсники эквивалентными, т. е. имеющими такую же частотную зависимость сопротивления, но иную конфигурацию. Подобная замена никак не отразится на характеристиках фильтра.

Для любой четырехэлементной схемы двухполюсника существует бесчисленное множество эквивалентных схем. Однако в данном случае наиболее выгодными (с точки зрения количества и величин требуемых элементов) будут следующие. Параллельное соединение последовательного и параллельного колебательных контуров (сопротивление z_1 в схеме рис. 56,б) заменяется последовательным соединением двух параллельных контуров (рис. 56,в).

Последовательное соединение параллельного и последовательного контуров (сопротивление z_2 в схеме рис. 57,б) заменяется параллельным соединением двух последовательных контуров (рис. 57,в).

Процесс синтеза эквивалентного двухполюсника ясен из рисунка. Например, параллельный колебательный контур, входящий в схему фильтра нижних частот (рис. 56,а), при переходе к схеме полосового фильтра преобразуется в четырехэлементный двухполюсник, показанный на рис. 56,б. В схеме на рис. 56,в этот двухполюсник заменен эквивалентным ему двухполюсником с двумя параллельными контурами. Величины элементов последнего могут быть вычислены с помощью следующих формул и коэффициентов пропорциональности:

$$d = \frac{f_0^2 - f_{\infty H}^2}{f_{\infty B}^2 - f_{\infty H}^2}; \quad f = \frac{f_{\infty B}^2 - f_0^2}{f_{\infty B}^2 - f_{\infty H}^2};$$

$$cL_1 = \frac{d}{4\pi^2 f_{\infty H}^2 C_1}; \quad eL_1 = \frac{f}{4\pi^2 f_{\infty B}^2 C_1},$$

где

$$f_{\infty B} = \frac{f_c}{2\sqrt{1-m^2}} + \sqrt{\frac{f_c^2}{4(1-m^2)} + f_0^2};$$

$$f_{\infty H} = f_{\infty B} - \frac{f_c}{\sqrt{1-m^2}};$$

f_c — предельная частота фильтра нижних частот (прототипа);

m — параметр соответствующего звена прототипа;
 f_0 — «центральная» частота полосового фильтра, определяемая по формуле (213).

Последовательный колебательный контур в схеме прототипа рис. 57,а преобразуется в четырехэлементный двухполосник рис. 57,б или в эквивалентный ему, показанный на рис. 57,в. В этом случае коэффициенты пропорциональности оказываются равными:

$$d = \frac{f_{\infty \text{в}}^2 - f_{\infty \text{н}}^2}{f_0^2 - f_{\infty \text{н}}^2}; \quad f = \frac{f_{\infty \text{в}}^2 - f_{\infty \text{н}}^2}{f_{\infty \text{в}}^2 - f_0^2};$$

$$\frac{C_2}{c} = \frac{1}{4\pi^2 f_{\infty \text{н}}^2 d L_2}; \quad \frac{C_2}{e} = \frac{1}{4\pi^2 f_{\infty \text{в}}^2 f L_2};$$

где $f_{\infty \text{н}}$ и $f_{\infty \text{в}}$ имеют тот же смысл, что и в предыдущем случае.

В заключение рассмотрим влияние потерь в элементах на величину характеристического затухания полосового фильтра в полосе пропускания. Казалось бы, вопрос не требует отдельного обсуждения: интересующие нас соотношения представляют собой соответствующую зависимость низкочастотного прототипа в диапазоне частот от $-\omega_c$ до $+\omega_c$, скопированную на другой участок оси частот $\omega_{\text{п}}$. Однако здесь имеется одна тонкость.

Любое преобразование частоты, связанное с заменой мнимого множителя $j\omega$ другим мнимым множителем (который можно рассматривать как сопротивление нового реактивного двухполосника), отражается только на величине и характере реактивных элементов (индуктивностей и емкостей) схемы преобразуемого двухполосника. На величине активных (действительных) сопротивлений, входящих в схему, такое преобразование никак не отражается. Эти сопротивления не меняют своей величины. Величины индуктивностей и емкостей низкочастотного прототипа при переходе к схеме полосового фильтра также остаются неизменными. Но если это так, то изменение рабочего диапазона частот, связанное с переходом от низкочастотной функции к полосовой, должно привести при неизменных величинах r_L и

L , а также r_c и C к изменению добротности (или коэффициента затухания) катушек и конденсаторов.

Действительно, предположим, что катушки индуктивности низкочастотного прототипа на предельной частоте ω_c имели добротность

$$Q_n = \frac{\omega_c L_i}{r_{Li}}. \quad (218)$$

При переходе к схеме полосового фильтра, имеющего центральную частоту ω_0 , в выражении для Q_n необходимо заменить величину ω_c в соответствии с формулой (204). После замены получим:

$$Q_n = \frac{\left(\frac{\omega_c}{2} + \sqrt{\frac{\omega_c^2}{4} + \omega_0^2} \right) L_i}{r_{Li}}. \quad (219)$$

Здесь индекс «п» у символа добротности означает, что речь идет о добротности элемента в преобразованной («полосовой») схеме. Из (218) и (219) находим:

$$\frac{Q_n}{Q_p} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2}}. \quad (220)$$

Предположим, что нам известно собственное затухание в полосе пропускания низкочастотного прототипа, имеющего при ω_c добротность элементов Q_n . Тогда собственное затухание полосового фильтра, полученного методом преобразования частоты, только в том случае будет равно (на соответствующих частотах полосы пропускания) затуханию прототипа, если добротность элементов полосового фильтра будет в Q_p/Q_n раз больше, чем добротность элементов прототипа. Возможно и иное применение формулы (220): зная добротность Q_p элементов, из которых предполагается выполнить полосовой фильтр, можно найти добротность Q_n элементов прототипа.

В случае узкополосных полосовых фильтров, у которых отношение центральной частоты к полосе пропуска-

ния Δf ($\Delta f = f_{св} - f_{сн}$) во много раз превышает единицу, формула (220) приобретает вид:

$$\frac{Q_{\pi}}{Q_{\pi}} \approx \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{f_0}{f_c}. \quad (221)$$

Отсюда следует, что создание узкополосных *LC*-фильтров с малой величиной собственного затухания в полосе пропускания предполагает наличие элементов с такой высокой добротностью, которая практически не всегда достижима.

Пример 25.

а) Полосовой фильтр, полученный преобразованием фильтра нижних частот, имеет центральную частоту $f_0 = 100$ кГц и полосу пропускания $f_{св} - f_{сн} = 4$ кГц. Какова должна быть добротность Q_{π} элементов полосового фильтра, чтобы его характеристическое затухание в полосе пропускания, обусловленное потерями в элементах, не превышало затухания прототипа, имеющего добротность элементов $Q_{\pi} = 30$.

б) Тот же полосовой фильтр выполнен из элементов, имеющих добротность $Q_{\pi} = 150$. Какой величины добротности элементов низкочастотного прототипа соответствует характеристическое затухание полосового фильтра в полосе пропускания?

Решение. а) Предельная частота прототипа

$$f_c = f_{св} - f_{сн} = 4000 \text{ Гц};$$

$$\frac{f_0}{f_c} = \frac{100 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^3} \gg 1.$$

Требуемая добротность элементов полосового фильтра (по формуле 221)

$$Q_{\pi} \approx Q_{\pi} \frac{f_0}{f_c} = 30 \frac{100 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^3} = 750.$$

б) Добротность элементов низкочастотного прототипа

$$Q_{\pi} \approx Q_{\pi} \frac{f_c}{f_0} = 150 \frac{4 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^3} = 6.$$

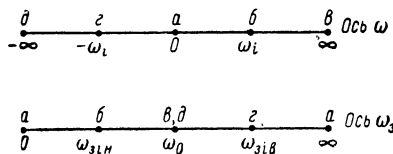
28. Заграждающие фильтры

Рассмотрим преобразование частоты, осуществляемое по формуле

$$j\omega \rightarrow \frac{j\omega_a}{(\omega_0^2 - \omega_s^2)},$$

где ω_0 — некоторая произвольная частота.

Посредством этого преобразования вся ось переменной ω преобразуется в положительную полуось переменной ω_3 , как показано на рис. 58. Из рисунка следует, что положительная полуось ω (от $\omega=0$ до $\omega=+\infty$) соответственно дает отрезок оси ω_3 от $\omega_3=0$ до $\omega_3=\omega_0$. Отрицательная полуось ω (от $\omega=-\infty$ до $\omega=0$) переходит соответственно



в отрезок оси ω_3 от $\omega_3=\omega_0$ до $\omega_3=\infty$.

При этом любая точка $\omega=\omega_i$ положительной полуоси ω преобразуется в точку

$$\omega_{3iH} = -\frac{1}{2\omega_i} +$$

$$+ \sqrt{\frac{1}{4\omega_i^2} + \omega_0^2}, \quad (222)$$

лежащую на положительной полуоси ω_3 .

Точка $\omega=-\omega_i$ отрицательной полуоси ω преобразуется в точку

$$\omega_{3iB} = \frac{1}{2\omega_i} +$$

$$+ \sqrt{\frac{1}{4\omega_i^2} + \omega_0^2} \quad (223)$$

на положительной полуоси ω_3 .

Если подвергнуть преобразованию (221) любую характеристику фильтра нижних частот для всей оси ω , то она окажется скопированной на положительной полуоси ω_3 и даст соответствующую характеристику заграждающего фильтра. Пример такого преобразования показан на рис. 58.

Характерные свойства преобразования легко обнаружить, вычислив произведение и разность частот ω_{3iB} и ω_{3iH} трансформированной характеристики:

$$\omega_{3iB}\omega_{3iH} = \omega_0^2, \quad (224)$$

$$\omega_{3iB} - \omega_{3iH} = \frac{1}{\omega_i}. \quad (225)$$

Первая формула не отличается от полученной ранее для полосового фильтра. Это свидетельствует о «геометрической» симметрии характеристик заграждающего фильтра относительно частоты ω_0 . Вторая формула свидетельствует о том, что *произведение любого преобразуемого отрезка $0-\omega_i$ оси частот ω на соответствующий ему отрезок оси частот ω_3 является постоянной величиной (равно единице)*. Наличие этих зависимостей дает возможность свести расчет заграждающего фильтра к расчету фильтра нижних частот.

Со схемной точки зрения преобразование (221) означает замену в исходной схеме:

а) каждой индуктивности L_i — параллельным колебательным контуром, образованным емкостью

$$C_{3i} = \frac{1}{L_i} \quad (226)$$

и индуктивностью

$$L_{3i} = \frac{1}{\omega_0^2 C_{3i}}; \quad (227)$$

б) каждой емкости C_i — последовательным колебательным контуром, образованным индуктивностью

$$L_{3i} = \frac{1}{C_i} \quad (228)$$

и емкостью

$$C_{3i} = \frac{1}{\omega_0^2 L_{3i}}. \quad (229)$$

Исходя из сказанного, можно рекомендовать такой порядок расчета заграждающего фильтра.

1. При задании требований к заграждающему фильтру всю ось частот разбивают на шесть участков, как показано на рис. 59: нижнюю и верхнюю ПЭПЧ ($0-f_{2H}$; $f_{2B}-\infty$), нижнюю и верхнюю переходные полосы ($f_{2H}-f_{3H}$; $f_{3B}-f_{2B}$), нижнюю и верхнюю ПЭЗЧ ($f_{3H}-f_{4H}$; $f_{4B}-f_{3B}$). В частном случае частоты f_{4B} и f_{4H} могут совпадать с частотой f_0 .

Граничные частоты перечисленных участков должны удовлетворять условию: $f_{2н}f_{2в} = f_{3н}f_{3в} = f_{4н}f_{4в} = f_0^2$. Если это условие для заданных частот не соблюдается, то следует изменить некоторые из них, как это делалось при расчете полосового фильтра.

Способы задания требований к фильтру в ПЭПЧ и ПЭЗЧ не отличаются от рассмотренных ранее.

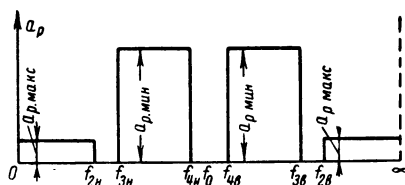


Рис. 59. Деление оси частот на участки при задании требований к заграждающему фильтру.

2. По известным требованиям к заграждающему фильтру определяем требования к фильтру нижних частот, который будет являться прототипом рассчитываемого заграждающего. В соответствии с (224) верхняя граница ПЭПЧ прототипа

$$f_2 = \frac{1}{f_{2в} - f_{2н}};$$

нижняя f_3 и верхняя f_4 границы ПЭЗЧ прототипа

$$f_3 = \frac{1}{f_{3в} - f_{3н}},$$

$$f_4 = \frac{1}{f_{4в} - f_{4н}}.$$

Не следует смущаться малой (меньшей, чем единица) величиной частот f_2, f_3, f_4 и, соответственно, непривычными величинами элементов схемы прототипа: после преобразования схемы будут получены приемлемые значения элементов.

Требования к прототипу в ПЭПЧ и ПЭЗЧ остаются такими же, как и требования к рассчитываемому заграждающему фильтру.

3. Определив требования к фильтру нижних частот (прототипу), синтезируем его схему любым из способов.

4. Полученную схему фильтра нижних частот преобразуем в схему заграждающего фильтра.

Для этого:

а) каждую индуктивность L_i схемы фильтра нижних частот заменяем параллельным колебательным контуром, составленным из емкости

$$C_{zi} = \frac{1}{L_i}$$

и индуктивности

$$L_{zi} = \frac{1}{C_{zi}\omega_0^2} = \frac{L_i}{\omega_0^2};$$

б) каждую емкость C_i фильтра нижних частот заменяем последовательным колебательным контуром, составленным из индуктивности

$$L_{zi} = \frac{1}{C_i}$$

и емкости

$$C_{zi} = \frac{1}{L_{zi}\omega_0^2} = \frac{C_i}{\omega_0^2}.$$

На этом синтез заграждающего фильтра заканчивается.

5. Любой из параметров заграждающего фильтра на частоте ω_{zi} будет равен соответствующему параметру прототипа на частоте ω_i , равной

$$\omega_i = \frac{\omega_{zi}}{\omega_0^2 - \omega_{zi}^2}. \quad (230)$$

При $\omega_{zi} < \omega_0$ приходится определять параметры прототипа на положительной полуоси ω ; при $\omega_{zi} > \omega_0$ — на отрицательной полуоси ω . Можно совершить и обратный переход: зная какой-либо параметр прототипа на частоте ω_i (положительной или отрицательной), найти частоту ω_{zi} , на которой соответствующий параметр заграждающего фильтра имеет такую же величину. Переход от переменной ω к ω_{zi} осуществляется по формуле

$$\omega_{zi} = -\frac{1}{2\omega_i} + \sqrt{\frac{1}{4\omega_i^2} + \omega_0^2}$$

при $\omega_i > 0$ и

$$\omega_{zi} = \frac{1}{2\omega_i} + \sqrt{\frac{1}{4\omega_i^2} + \omega_0^2}$$

при $\omega_i < 0$.

6. С целью получения более приемлемых величин элементов схемы заграждающего фильтра можно заменить входящие в его схему четырехэлементные двухполюсники эквивалентными.

29. Полосовые фильтры с несимметричными характеристиками затухания

При конструировании полосовых фильтров, особенно с узкой (порядка нескольких процентов) относительной полосой пропускания, рассмотренные выше схемы звеньев полосовых фильтров применяют сравнительно редко по следующим причинам:

а) величины индуктивностей в последовательной и параллельной ветвях звена при узкой относительной полосе пропускания резко отличаются друг от друга. То же относится и к емкостям. Это создает определенные трудности при реализации схемы;

б) наличие четырех элементов в одной ветви у звеньев типа m резко затрудняет настройку фильтра по сравнению со случаем, когда элементов в плече имеется два или три (изменяя в процессе настройки первую или третью резонансную частоту двухполюсника, образующего четырехэлементную ветвь, мы неизбежно изменяем также и вторую резонансную частоту);

в) собственное затухание звена в полосе пропускания, обусловленное потерями в элементах, при реально осуществимых величинах добротности катушек часто оказывается недопустимо большим.

Поэтому полосовые фильтры (особенно узкополосные) в большинстве случаев выполняют не из звеньев типа k и типа m , а из так называемых звеньев с несимметричными характеристиками. (В названии подразумевается несимметричный характер графиков частотной зависимости собственной постоянной передачи в верхней и нижней полосе задерживания.)

Схемы таких звеньев мы получим из схемы звена типа k фильтра нижних частот методом преобразования

частоты. Но преобразование будет несколько отличаться от рассмотренных в предыдущих параграфах.

До сих пор, заменяя переменную $j\omega$ некоторой функцией $f(j\omega)$

$$j\omega \rightarrow f(j\omega),$$

мы не делали различия между переменной $j\omega = j\omega_L$, которая входит в выражение индуктивного сопротивления, и между переменной $j\omega = j\omega_C$, которая входит в выражение емкостного сопротивления. Обе переменные ($j\omega_L$ и $j\omega_C$) мы заменяли одинаковой функцией.

Преобразования, при которых переменные $j\omega_L$ и $j\omega_C$ заменяются одинаковой функцией $f(j\omega)$, называются симметричными преобразованиями.

Но можно осуществить и такое преобразование частоты, при котором переменная $j\omega$ в исходных формулах прототипа заменяется одной функцией:

$$j\omega_L \rightarrow f_1(j\omega),$$

а переменная $j\omega_C$ — другой функцией:

$$j\omega_C \rightarrow f_2(j\omega).$$

(Индексы 1 и 2 при знаке функции указывают в обоих случаях на разный вид этих функций.)

В отличие от симметричного преобразования такое преобразование частоты называется *несимметричным*.

Несимметричные преобразования частоты являются более сложными, чем симметричные, и, рассматривая их, удобнее оперировать не с переменной $j\omega$, а с комплексной переменной $p = \sigma + j\omega$. (Напомним, что ось $j\omega$ мы считаем расположенной в плоскости комплексного переменного p и рассматриваем переменную $j\omega$ как частный случай переменной p при $\sigma = 0$.)

Разумеется, переменную p можно было бы ввести и раньше — при рассмотрении симметричных преобразований. Но тогда в этом не было особой необходимости. При желании читатель сам легко может записать известные ему формулы симметричных преобразований в виде функций переменной p , заменив в них для этого $j\omega$ на p и, соответственно, $(-\omega^2)$ на p^2 .

Чтобы отличить комплексный частотный множитель p , который входит в формулу индуктивного сопротивления, от множителя, который входит в формулу емкостного сопротивления, обозначим первый из них символом p_L , а второй символом p_C .

Осуществим в формулах низкочастотного прототипа замену переменных («преобразование частоты») по формулам:

$$p_L \rightarrow \frac{1}{p_H}, \quad (231)$$

$$p_C \rightarrow \frac{p_H^2 - p_i^2}{p_H}, \quad (232)$$

где p_H — новая переменная выбранного несимметричного преобразования;

$p_i = j\omega_i$ — некоторая произвольная частота.

Обозначим:

$$p = \sqrt{p_L p_C}. \quad (233)$$

Тогда на основании (231—233) можем написать:

$$p = \sqrt{p_L p_C} = \frac{\sqrt{p_H^2 - p_i^2}}{p_H}. \quad (234)$$

Решая это уравнение относительно p_H , получим:

$$p_H = \frac{p_i}{\sqrt{1 - p^2}}. \quad (235)$$

Можно убедиться путем подстановки, что при изменении p вдоль всей мнимой отрицательной полуоси от $p=0$ до $p=j\infty$ переменная p_H пробегает соответственно отрезок положительной мнимой полуоси от $p_H=j\omega_i$ до $p_H=0$. Таким образом, характеристика собственной постоянной передачи фильтра нижних частот (прототипа), соответствующая мнимой отрицательной полуоси переменной p , в результате рассматриваемого преобразования окажется скопированной на отрезке $0-j\omega_i$ мнимой положительной полуоси переменной p_H .

Может возникнуть вопрос, почему мы говорим о преобразовании мнимой *отрицательной* полуоси, в то время

как преобразование мнимой *положительной* полуоси, казалось бы, приводит к такому же результату. Однако из теории цепей известно, что при уменьшении частоты собственная фазовая постоянная передачи должна всегда уменьшаться (в алгебраическом смысле). Поэтому из двух возможных вариантов мы выбрали первый.

Остается выяснить, каким значениям переменной p соответствует отрезок мнимой *положительной* полуоси переменной p_n от $j\omega_i$ до $j\infty$.

Ни при каких мнимых значениях переменной p переменная p_n не попадает на этот отрезок. Но если предположить, что переменная p является не мнимой, а действительной величиной ($p=\sigma$, $\omega=0$), то при изменении p от 0 до 1 переменная p_n пробежит отрезок мнимой оси плоскости p_n от $j\omega_i$ до $j\infty$. Следовательно, на этом отрезке переменной окажутся скопированными характеристики прототипа, соответствующие действительным значениям переменной p . Что же будет получено на этом отрезке: полоса пропускания или полоса задерживания?

Подставляя в формулу собственной постоянной передачи звена типа k значение $\omega^2 = -p^2 = -\sigma^2$

$$(j\omega = p, -\omega^2 = p^2),$$

получим:

$$\operatorname{th} \frac{g}{2} = \frac{\eta_\sigma}{\sqrt{\eta_\sigma^2 + 1}}, \quad (236)$$

где

$$\eta_\sigma = \frac{\sigma}{\omega_c}. \quad (237)$$

Поскольку гиперболический тангенс оказался действительной величиной, фильтр имеет в соответствующем диапазоне частот полосу задерживания ($a \neq 0$). Собственная фазовая постоянная в указанном диапазоне частот равна нулю ($\operatorname{th} \frac{g}{2} < 1$).

Таким образом, в результате рассмотренного преобразования характеристик звена типа k фильтра нижних частот получены характеристики полосового фильтра.

Со схемной точки зрения рассмотренное преобразование соответствует замене индуктивности L_i в схеме прототипа емкостью $C_{in} = 1/L_i$, а емкости C_i — парал-

тельным колебательным контуром, емкость которого равна C_i , а резонансная частота равна ω_i .

Схема П-образного звена полосового фильтра, полученная с помощью преобразования (231) и (232) из схе-

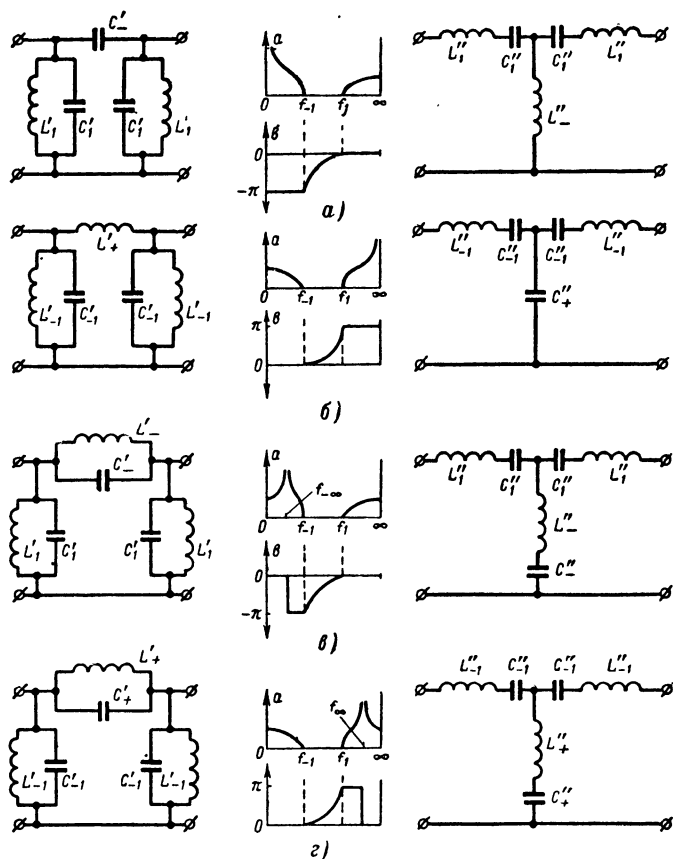


Рис. 60. Звенья полосовых фильтров с одним полюсом затухания.

мы П-образного звена типа k , показана на рис. 60, а (слева). На этом же рисунке показан характер частотной зависимости собственной постоянной передачи звена. Затухание имеет полюс при $f=0$ и стремится к некоторому пределу при $f \rightarrow \infty$.

Такую же зависимость собственной постоянной передачи имеет показанное на рис. 60,а (справа) звено, полученное из Т-образного звена типа k с помощью преобразования

$$p_L \rightarrow \frac{p_n^2 - p_i^2}{p_n},$$

$$p_C \rightarrow \frac{1}{p_n}.$$

Зависимость $g = \varphi(\omega)$ в обоих случаях имеет одинаковый характер, потому что зависимость $p_n = \varphi(p_L p_C)$ в обоих случаях получается одинаковой.

Преобразование $p_L \rightarrow p_n$ и

$$p_C \rightarrow \frac{p_n^2 - p_i^2}{p_n}$$

дает схему, показанную на рис. 60,б (слева).

Преобразование

$$p_L \rightarrow \frac{p_n^2 - p_i^2}{p_n}$$

и $p_C \rightarrow p_n$ дает схему рис. 60,б (справа).

Частотная характеристика собственной постоянной передачи обеих схем получается одинаковой, потому что в результате обоих преобразований отрицательная мнимая полуось комплексной переменной p преобразуется в отрезок $j\omega_i - j\infty$ переменной p_n , а некоторая часть действительной оси переменной p — в отрезок $0 - j\omega_i$ переменной p_n .

С помощью других несимметричных преобразований могут быть получены все остальные схемы звеньев, изображенные на рис. 60—62.

Характерной особенностью каждого из звеньев, отличающей это звено от других, является количество и положение полюсов затухания, которое легко установить, рассматривая графики частотной зависимости затухания.

Например, звенья, изображенные на рис. 60,а, имеют полюс затухания при $f=0$, на рис. 60,б — при $f=\infty$, на

рис. 60,в — при конечной частоте $f_{-\infty}$ ниже полосы пропускания, на рис. 60,г — при конечной частоте f_{∞} выше полосы пропускания.

Звенья на рис. 61 имеют по два полюса. На рис. 61,а изображены звенья, имеющие один полюс при $f=0$, а другой — при конечном значении частоты $f=f_{\infty}$ выше полосы пропускания.

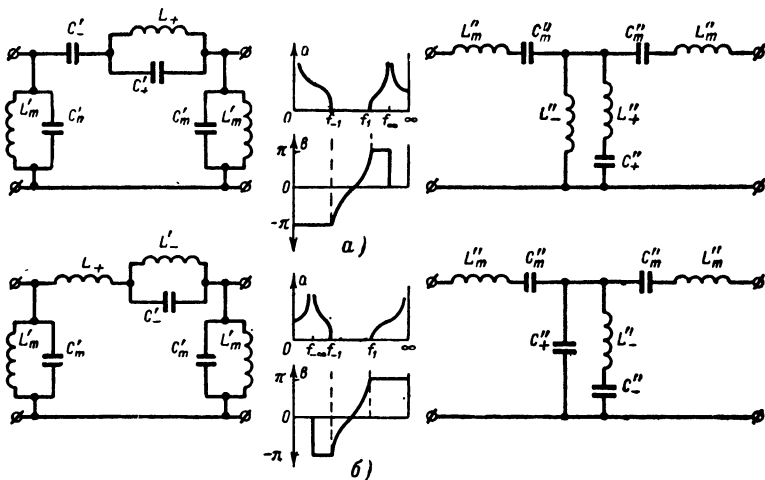


Рис. 61. Звенья полосовых фильтров с двумя полюсами затухания (один полюс лежит при частоте, равной нулю или бесконечности).

Звенья на рис. 61,б имеют один полюс при конечном значении частоты $f=f_{-\infty}$ ниже полосы пропускания, а другой — при $f=\infty$.

Наконец, звенья на рис. 62,а и б имеют по два полюса затухания на конечных частотах, причем один лежит ниже полосы пропускания, а другой — выше ее.

Рассмотрим подробнее вопрос о преобразовании характеристик прототипа. Если при выводе формул для величин Z_T , Z_{Π} и $\text{th} \frac{g}{2}$ звена типа k фильтра нижних частот различать выражения $j\omega_L$ и $j\omega_C$, то эти формулы будут иметь вид:

$$\text{th} \frac{g}{2} = \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}},$$

$$Z_T = R \sqrt{\frac{\omega_L}{\omega_C}} \sqrt{1 - \eta^2},$$

$$Z_{II} = \frac{R \sqrt{\frac{\omega_L}{\omega_C}}}{\sqrt{1 - \eta^2}},$$

где, как и прежде,

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_C},$$

$$\omega_C = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

но в отличие от предыдущего

$$\omega = \sqrt{\omega_L \omega_C}.$$

Рассматривая эти формулы, убеждаемся, что величина $\operatorname{tg} \frac{g}{2}$ является функцией пере-

менной $\omega = \sqrt{\omega_L \omega_C}$ или $p = \sqrt{p_L p_C}$. Поэтому преобразование характеристики собственной постоянной передачи прототипа в собственную постоянную передачи полосового фильтра осуществлялось простой заменой переменной p на p_H (или ω на ω_H). В то же время величины Z_T и Z_{II} можно представить в виде функций переменной ω или p , умноженных на выражение $\sqrt{\omega_L/\omega_C}$ или $\sqrt{p_L/p_C}$.

При симметричных преобразованиях это выражение было равно единице. При несимметричных оно является функцией частоты и его необходимо учитывать, вычисляя частотную зависимость характеристического сопротивления.

Анализ показывает, что при одинаковых значениях частот среза f_{-1} и f_1 все звенья полосовых фильтров, изображенные на рис. 60 и 61 слева, а также на рис. 62, а,

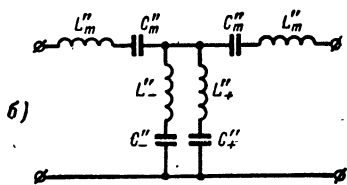
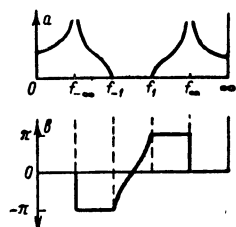
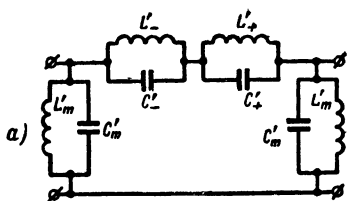


Рис. 62. Звенья полосовых фильтров с двумя полюсами затухания при конечных частотах.

будут иметь одинаковую зависимость характеристического сопротивления — такую же, как зависимость сопротивления Z_{Π} звена типа k полосового фильтра (рис. 63,б). Разумеется, мы предполагаем, что звенья получены с помощью несимметричных преобразований из одного и того же звена прототипа.

Точно так же можно показать, что все звенья, изображенные на рис. 60 и 61 справа и на рис. 62,б имеют одинаковую частотную зависимость характеристического сопротивления: такую же, как зависимость сопротивле-

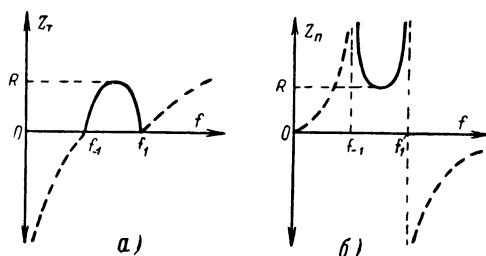


Рис. 63. Частотная зависимость характеристического сопротивления типов Z_T и Z_{Π} полосового фильтра.

ния Z_T звена типа k полосового фильтра с симметричными характеристиками (рис. 63,а).

Следовательно, любые звенья первой группы можно соединять друг с другом по принципу согласования характеристических сопротивлений.

Любые звенья второй группы также можно соединять друг с другом по принципу согласования характеристических сопротивлений. Соединять друг с другом звенья первой и второй группы нельзя, так как их характеристические сопротивления даже при одинаковых R , f_{-1} и f_1 имеют разную частотную зависимость.

Величины элементов звеньев можно вычислить разными способами:

- а) через величины элементов прототипа;
- б) непосредственно по известным значениям параметров R , f_{-1} , f_1 и f_{∞} ;
- в) по параметрам звена, выраженным в масштабе шаблона Румпеля.

Последний способ предполагает наличие таблиц гиперболических функций от действительного аргумента, но требует, в сравнении с другими способами, меньше всего вычислений и обеспечивает наибольшую точность определения величин элементов звена при выбранном значении параметра f_{∞} . Поэтому в дальнейшем мы дадим расчетные формулы только для расчета по третьему способу.

30. Расчет фильтров с несимметричными характеристиками с помощью шаблона

Шаблон Румпеля является замечательным средством расчета полосовых фильтров с несимметричными характеристиками. Преимущества шаблона проявляются в данном случае в еще большей степени, чем при расчете фильтров нижних частот.

Отсылая интересующихся теорией вопроса к [Л. 8], мы рассмотрим только практическую сторону расчета.

Частотная зависимость затухания любого из звеньев (рис. 60—62) может быть построена с помощью известного нам шаблона Румпеля. Однако такое построение может быть выполнено не в масштабе частоты f или ω , а в масштабе переменной («частоты») y_{Π} :

$$y_{\Pi} = \frac{1}{2} \ln \frac{f^2 - f_1^2}{f^2 - f_{-1}^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{f_1}{f_{-1}}, \quad (238)$$

где f_{-1} — нижняя предельная частота (нижняя частота среза);

f_1 — верхняя частота среза.

Для перехода от переменной f к переменной y_{Π} при практических расчетах более удобна следующая формула:

$$y_{\Pi} = \frac{1}{2} \ln \frac{(f - f_1)(f + f_1)f_{-1}}{(f - f_{-1})(f + f_{-1})f_1}. \quad (239)$$

В частности, формула (239) дает возможность воспользоваться при определении y_{Π} таблицей логарифмов.

Очевидно, зависимость $y_{\Pi} = \varphi(f)$ отличается от применяемой при расчете фильтров нижних частот зависимости $y = \varphi_1(f)$. Поэтому величина y в формуле (238) имеет индекс «п».

Обратный переход от переменной y_{Π} к переменной f в случае необходимости можно осуществить по формуле

$$f = f_{-1} \sqrt{\frac{f_1/f_{-1} - e^{2y_{\Pi}}}{f_{-1}/f_1 - e^{-2y_{\Pi}}}}. \quad (240)$$

Свойства преобразования (238) рассмотрим на конкретном числовом примере. Предположим, что требования к величине собственного затухания фильтра ($a = a_{\text{р. мин}} + 0,7$) заданы чертежом рис. 64 и что в ходе предыдущего расчета определены нижняя и верхняя частоты среза: $f_{-1} = 4 \text{ кГц}$, $f_1 = 5 \text{ кГц}$.

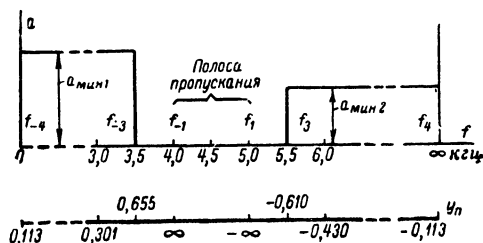


Рис. 64. Требования к полосовому фильтру в масштабе частоты f .

С помощью формулы (238) переходим от переменной f к переменной y_{Π} . Результаты перехода показаны на рис. 64 внизу, где значения y_{Π} , соответствующие характерным частотам чертежа, нанесены на отдельной оси. Поскольку на рисунке принят равномерный масштаб для оси частот f , масштаб оси y_{Π} , как и следовало ожидать, получился неравномерным. Значениям частот f от нижней до верхней частоты среза $f_{-1} < f < f_1$ не соответствуют никакие действительные значения y_{Π} .

Построим теперь кривую, показывающую требования к фильтру в ПЭЗЧ, на другом чертеже, в системе координат (y_{Π}, a) . При построении возьмем для оси y_{Π} равномерный масштаб и поменяем местами положительную и отрицательную полуоси y_{Π} (по сравнению с их расположением на рис. 64). В результате перестановки полуосей значения y_{Π} при перемещении вдоль оси y_{Π} слева направо будут возрастать, изменяясь от «минус беско-

нечности» через нуль до «плюс бесконечности» (рис. 65). Очевидно, при перестановке полюсов нижняя и верхняя полосы задерживания меняются местами. Анализируя формулу (238), убеждаемся, что значения y_n , соответствующие частотам $f=0$ и $f=\infty$, всегда оказываются равными друг другу по модулю, но имеют разный знак. Поэтому после перестановки полюсов y_n обе упомянутые точки будут расположены на одинаковых расстояниях от точки $y_n=0$, слева и справа от нее.

Замечательное свойство звеньев с несимметричными характеристиками, удачно используемое при показанном

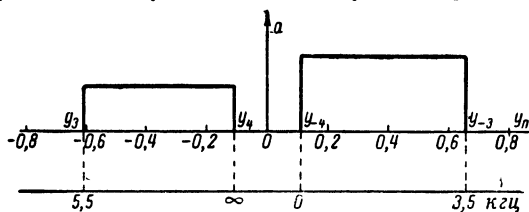


Рис. 65. Требования к полосовому фильтру, переведенные в масштаб «частоты» y_n .

на рис. 65 расположении полюсов y_n , состоит в следующем.

Если мы расположим полюс затухания (ось симметрии шаблона) левее точки y_4 или правее точки y_{-4} и обведем шаблон карандашом, то полученная кривая в пределах верхней и нижней полосы задерживания будет представлять собой характеристику затухания одного звена полосового фильтра с несимметричной характеристикой затухания и с одним полюсом затухания. Отрезок кривой на чертеже в промежутке между y_4 и y_{-4} не имеет физического смысла. А участки кривой, расположенные левее точки y_3 и правее точки y_{-3} , характеризуют затухание звена в переходной полосе и обычно не представляют практического интереса.

Основной этап расчета фильтра состоит в таком выборе количества и положения полюсов затухания, чтобы суммарное затухание (кривая, полученная путем суммирования всех построенных кривых) в пределах верхней и нижней полосы эффективно задерживаемых частот нигде не опускалось ниже заданной нормы. Поставленная задача должна быть выполнена с минимальным ко-

личеством звеньев (с минимальным количеством полюсов затухания).

Располагать полюсы можно совершенно произвольно в пределах заданной нижней и верхней полосы эффективно задерживаемых частот, в том числе и на любой (нижней или верхней) граничной частоте каждой из этих полос. На одной и той же частоте можно расположить несколько полюсов затухания. Бесполезно располагать полюсы левее частоты y_3 и правее частоты y_{-3} , что соот-

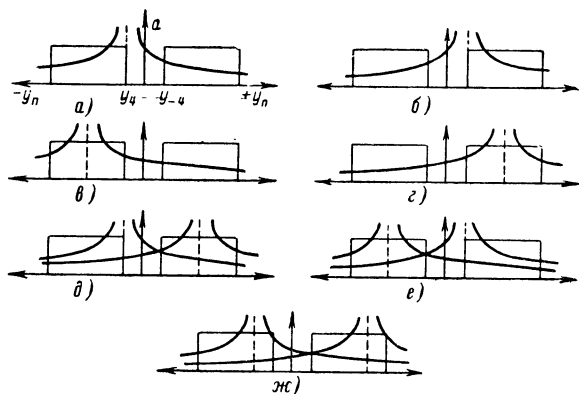


Рис. 66. Типичные положения полюсов затухания на оси $y_{\text{п}}$.

ветствовало бы размещению полюсов в переходной полосе. Не следует также располагать полюсы в промежутке между частотами y_4 и y_{-4} , что соответствовало бы не реализуемым в цепочечном варианте схемам звеньев.

Выполнив этот этап расчета (определение количества и расположения полюсов), необходимо решить, с помощью каких звеньев будут реализованы все полюсы затухания. При этом исходят из следующих соображений. Полюс затухания, расположенный на верхней границе верхней полосы задерживания (рис. 66,а), реализуется одним из звеньев рис. 60,б. Полюс, расположенный на нижней границе нижней полосы задерживания (рис. 66,б), реализуется одним из звеньев, представленных на рис. 60,а. Полюс, расположенный в верхней полосе задерживания (рис. 66,в), реализуется одним из

звеньев рис. 60,г. Полюс, расположенный в нижней полосе задерживания (рис. 66,г), реализуется одним из звеньев рис. 60,в.

Два полюса, расположенные как показано на рис. 66,д (один на верхней границе верхней полосы задерживания, а другой — в пределах нижней полосы задерживания), можно было бы реализовать, соединив по принципу согласования характеристических сопротивлений звено рис. 60,б со звеном рис. 60,в. Однако более экономичное решение получается, если вместо двух этих звеньев взять одно из звеньев, показанных на рис. 61,б. Точно так же два полюса, расположенные как показано на рис. 66,е, целесообразно реализовать не с помощью двух звеньев (рис. 60,а и г) а с помощью одного из звеньев, показанных на рис. 61,а.

Два полюса, один из которых расположен в произвольной точке нижней полосы задерживания, а другой — в произвольной точке верхней полосы задерживания, можно реализовать как с помощью двух шестиэлементных звеньев (рис. 60,в и г), так и с помощью одного восьмиэлементного звена (рис. 62). Последний вариант является более экономичным. Но первый более предпочтителен с конструктивно-технологической точки зрения: наличие четырех реактивных элементов в одной ветви резко усложняет настройку такой ветви по сравнению с настройкой одиночного последовательного или параллельного контура. По этой же причине (облегчение настройки фильтра при его изготовлении) два полюса при конечных значениях частоты и один при нулевой частоте желательно реализовать не путем каскадного соединения одного из звеньев рис. 62 и одного из звеньев рис. 60,а, а в виде каскадного соединения одного из звеньев рис. 60,в и одного из звеньев рис. 61,а.

Если в состав схемы решено включить звенья рис. 60,в или г, то следует с помощью этих звеньев реализовать полюсы, расположенные ближе других к границам полосы пропускания, т. е. соответствующие наибольшим (по модулю) значениям y_{∞} . Разумеется, схема фильтра при этом должна состоять или только из звеньев, имеющих характеристическое сопротивление типа Z_{Π} , или только из звеньев, имеющих характеристическое сопротивление типа Z_T . Более экономичными и удобными при настройке являются схемы, которые со-

держат меньше катушек и последовательных колебательных контуров.

После составления схемы каждые две индуктивности или емкости, соединенные последовательно или параллельно, следует заменить одной эквивалентной.

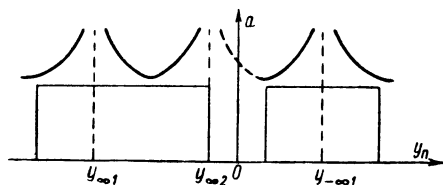


Рис. 67. К примеру 26.

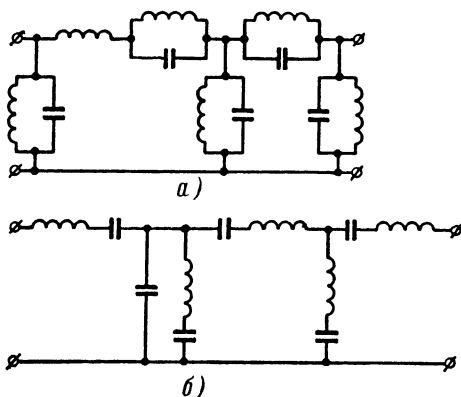


Рис. 68. Две схемы, реализующие заданное на рис. 67 расположение полюсов затухания.

Пример 26. Составить схему полосового фильтра, реализующую показанное на рис. 67 расположение полюсов затухания. (Кривая на рис. 67 представляет собой результат суммирования кривых, построенных с помощью шаблона.)

Решение. Приведенная схема фильтра из звеньев с характеристическим сопротивлением типа Z_{Π} показана на рис. 68,а. На рис. 68,б изображена схема из звеньев с характеристическим сопротивлением типа Z_T .

Рассматривая влияние структуры схем на частотную зависимость затухания, внимательный читатель может сделать такой вывод. В схемах фильтров, составленных

из звеньев с характеристическим сопротивлением типа Z_{Π} , полюс затухания при нулевой частоте реализуется емкостью в последовательной ветви. Полюс затухания при конечной частоте — параллельным колебательным контуром в последовательной ветви. Наконец, полюс затухания при бесконечно большой частоте реализуется индуктивностью в последовательной ветви.

В схемах фильтров, составленных из звеньев с характеристическим сопротивлением типа Z_T , полюс затухания при нулевой частоте реализуется параллельной ветвью, состоящей из одной индуктивности. Полюс затухания при конечной частоте, не равной нулю, реализуется параллельной ветвью, представляющей последовательный колебательный контур. Полюс затухания при бесконечно большой частоте реализуется параллельной ветвью, состоящей из одной емкости.

Величины элементов схемы каждого из звеньев удобно определять через параметры звеньев, выраженные в масштабе шаблона Румпеля. Обозначим через L_{01} и C_{01} величины элементов последовательного плеча, а через L_{02} и C_{02} — параллельного плеча Γ -образного звена полосового фильтра типа k , причем

$$L_{01} = \frac{R}{2\pi \Delta f},$$

$$C_{01} = \frac{\Delta f}{2\pi R f_0^2},$$

$$L_{02} = \frac{R \Delta f}{2\pi f_0^2},$$

$$C_{02} = \frac{1}{2\pi R \Delta f},$$

где

$$f_0 = \sqrt{f_{-1} f_1};$$

$$\Delta f = f_1 - f_{-1};$$

R — номинальное значение характеристического сопротивления.

Тогда величины элементов звеньев, изображенных на рис. 60—62, могут быть вычислены по следующим формулам.

Для схем на рис. 60,а:

$$L'_1 = L_{02}; \quad L''_1 = e^{-2y_1} L_{01};$$

$$C'_1 = e^{-2y_1} C_{02}; \quad C''_1 = C_{01};$$

$$C'_- = \operatorname{sh}(2y_1) C_{02}; \quad L''_- = \operatorname{sh}(2y_1) L_{01}.$$

Для схем на рис. 60,б:

$$L'_{-1} = e^{2y_1} L_{02}; \quad L''_{-1} = L_{01};$$

$$C'_{-1} = C_{02}; \quad C''_{-1} = e^{2y_1} C_{01};$$

$$L'_+ = \frac{1}{\operatorname{sh} 2y_1} L_{02}; \quad C''_+ = \frac{1}{\operatorname{sh} 2y_1} C_{01}.$$

Для схем на рис. 60,в:

$$L'_1 = e^{y_{-\infty} - y_1} L_{02}; \quad L''_1 = e^{-(y_{-\infty} + y_1)} L_{01};$$

$$C'_1 = e^{-(y_{-\infty} + y_1)} C_{02}; \quad C''_1 = e^{y_{-\infty} - y_1} C_{01};$$

$$L'_- = \frac{1}{\operatorname{sh}(y_{-\infty} - y_1)} L_{02}; \quad L''_- = \operatorname{sh}(y_{-\infty} + y_1) L_{01};$$

$$C'_- = \operatorname{sh}(y_{-\infty} + y_1) C_{02}; \quad C''_- = \frac{1}{\operatorname{sh}(y_{-\infty} - y_1)} C_{01}.$$

Для схем на рис. 60,г:

$$L'_{-1} = e^{-y_{\infty} + y_1} L_{02}; \quad L''_{-1} = e^{y_{\infty} + y_1} L_{01},$$

$$C'_{-1} = e^{y_{\infty} + y_1} C_{02}; \quad C''_{-1} = e^{-y_{\infty} + y_1} C_{01},$$

$$L'_+ = \frac{1}{\operatorname{sh}(-y_{\infty} + y_1)} L_{02}; \quad L''_+ = \operatorname{sh}(-y_{\infty} - y_1) L_{01},$$

$$C'_+ = \operatorname{sh}(-y_{\infty} + y_1) C_{02}; \quad C''_+ = \frac{1}{\operatorname{sh}(-y_{\infty} - y_1)} C_{01}.$$

Для схем на рис. 61,а:

$$L'_m = L_{02}; \quad L''_m = \frac{\operatorname{ch}(y_1 + h)}{\operatorname{ch} p} L_{01};$$

$$C'_m = \frac{\operatorname{ch}(y_1 + h)}{\operatorname{ch} p} C_{02}; \quad C''_m = C_{01};$$

$$C'_- = \operatorname{th} p \operatorname{sh}(2y_1) C_{02}; \quad L''_- = \operatorname{th} p \operatorname{sh}(2y_1) L_{01};$$

$$L'_+ = \frac{1}{\operatorname{th} p \operatorname{sh}(2p)} L_{02}; \quad L''_+ = \operatorname{th} p \operatorname{sh}(-2h) L_{01};$$

$$C'_+ = \operatorname{th} p \operatorname{sh}(-2h) C_{02}; \quad C''_+ = \frac{1}{\operatorname{th} p \operatorname{sh}(2p)} C_{01},$$

где

$$p = \frac{1}{2}(y_1 - y_\infty); \quad h = \frac{1}{2}(y_1 + y_\infty).$$

Для схем на рис. 61,б:

$$L'_m = \frac{\operatorname{ch} p}{\operatorname{ch} |y_1 - h|} L_{02}; \quad L''_m = L_{01};$$

$$C'_m = C_{02}; \quad C''_m = \frac{\operatorname{ch} p}{\operatorname{ch} |y_1 - h|} C_{01};$$

$$L'_- = \frac{1}{\operatorname{th} p \operatorname{sh}(2h)} L_{02}; \quad L''_- = \operatorname{th} p \operatorname{sh}(2p) L_{01};$$

$$C'_- = \operatorname{th} p \operatorname{sh}(2p) C_{02}; \quad C''_- = \frac{1}{\operatorname{th} p \operatorname{sh}(2h)} C_{01};$$

$$L'_+ = \frac{1}{\operatorname{th} p \operatorname{sh}(2y_1)} L_{02}; \quad C''_+ = \frac{1}{\operatorname{th} p \operatorname{sh}(2y_1)} C_{01},$$

где

$$p = \frac{1}{2}(y_{-\infty} + y_1); \quad h = \frac{1}{2}(y_{-\infty} - y_1).$$

Для схем на рис. 62:

$$L'_m = \frac{\operatorname{ch} p}{\operatorname{ch} |y_1 - h|} L_{02};$$

$$C'_m = \frac{\operatorname{ch}(y_1 + h)}{\operatorname{ch} p} C_{02};$$

$$L'_- = \frac{1}{\operatorname{th} p \operatorname{sh}(y_{-\infty} - y_1)} L_{02};$$

$$C'_{-} = \operatorname{th} p \operatorname{sh} (y_{-\infty} + y_1) C_{02};$$

$$L'_{+} = \frac{1}{\operatorname{th} p \operatorname{sh} (-y_{\infty} + y_1)} L_{02};$$

$$C'_{+} = \operatorname{th} p \operatorname{sh} (-y_{\infty} - y_1) C_{02};$$

$$L''_m = \frac{\operatorname{ch} (y_1 + h)}{\operatorname{ch} p} L_{01};$$

$$C''_m = \frac{\operatorname{ch} p}{\operatorname{ch} |y_1 - h|} C_{01};$$

$$L''_{-} = \operatorname{th} p \operatorname{sh} (y_{-\infty} + y_1) L_{01};$$

$$C''_{-} = \frac{1}{\operatorname{th} p \operatorname{sh} (-y_{\infty} - y_1)} L_{01};$$

$$L''_{+} = \operatorname{th} p \operatorname{sh} (-y_{\infty} - y_1) L_{01};$$

$$C''_{+} = \frac{1}{\operatorname{th} p \operatorname{sh} (-y_{\infty} + y_1)} C_{01},$$

где

$$p = \frac{1}{2} (y_{-\infty} - y_{\infty}); \quad h = \frac{1}{2} (y_{-\infty} + y_{\infty}).$$

Во всех приведенных выше соотношениях величина y_1 определяется по формуле

$$y_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{f_1}{f_{-1}}.$$

Значения y_{∞} и $y_{-\infty}$ берутся из графика, построенного для определения количества и расположения полюсов затухания фильтра. При этом обязательно следует перейти от величин y_{∞} , выраженных в сантиметрах, к величинам y_{∞} , выраженным в единицах переменной y , разделив каждое найденное из графика значение y_{∞} на 20 см. Система обозначений элементов в схемах на рис. 60—62 рассмотрена в приложении 3.

Частотная зависимость характеристической фазовой постоянной любого из звеньев может быть построена

с помощью шаблона. Для этого следует перейти от переменной f к новой частотной переменной x_{π} :

$$x_{\pi} = \frac{1}{2} \ln \frac{f_1^2 - f^2}{f^2 - f_{-1}^2} \frac{f_{-1}}{f_1} = \frac{1}{2} \ln \frac{(f_1 + f)(f_1 - f)f_{-1}}{(f + f_{-1})(f - f_{-1})f_1} \quad (241)$$

с обратной функцией

$$f = f_{-1} \sqrt{\frac{f_1/f_{-1} + e^{2x_{\pi}}}{f_{-1}/f_1 + e^{2x_{\pi}}}}. \quad (242)$$

Результат преобразования показан на рис. 69. При изменении (увеличении) частоты f от f_{-1} до f_1 в полосе пропускания переменная x_{π} уменьшается от ∞ до $-\infty$, проходя при этом через нуль.

Кривая характеристической фазовой постоянной звена полосового фильтра в масштабе x_{π} строится с помощью такого же шаблона, который применяется для построения графика характеристической фазовой постоянной звена фильтра нижних частот в масштабе x . Чтобы перемещение вдоль оси x_{π} слева направо соответствовало увеличению частоты f , следует оставить для обеих полуосей x_{π} такое же расположение, как на рис. 69.

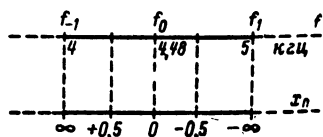


Рис. 69. Преобразование оси частот f в ось переменной («частоты») x_{π} .

Шаблон располагают на оси x_{π} таким образом, чтобы при перемещении вдоль оси x_{π} слева направо величина фазовой постоянной b возрастала. Для построения графика фазовой постоянной звена абсциссу шаблона, которая соответствует значению угла $b = \pi/2$ (точку A шаблона на рис. 42), совмещают с точкой $x_{\pi} = y_{\infty}$ и обводят шаблон карандашом. При этом следует учитывать знак величины y_{∞} , который может быть как положительным, так и отрицательным. Соответственно точку A шаблона совмещаем или с положительным, или с отрицательным значением x_{π} . Если выбранное звено имеет два полюса затухания, проводят не одну, а две кривых, прикладывая шаблон к соответствующим точкам оси x_{π} , и затем суммируют эти кривые.

Напомним, что для шаблонов затухания и фазовой постоянной у нас принят разный масштаб (единица ве-

личины y соответствует 20 см, единица величины x — 10 см). Поэтому откладывая на оси x_{Π} величину y_{∞} , взятую в сантиметрах непосредственно с чертежа, следует уменьшить ее в 2 раза.

В заключение остановимся на вопросе о выборе предельных частот f_{-1} и f_1 и номинального значения характеристического сопротивления фильтра. Эти величины выбираются, исходя из требований, предъявляемых к фильтру в полосе эффективно пропускаемых частот.

Заметим, что при рассмотрении фильтров с несимметричными характеристиками мы несколько изменили принятую ранее систему обозначения характерных частот и приняли такие обозначения:

- f_{-1} — нижняя частота среза;
- f_1 — верхняя частота среза;
- f_{-2} — нижняя граница ПЭПЧ;
- f_2 — верхняя граница ПЭПЧ;
- f_{-4} — f_{-3} — нижняя ПЭЗЧ;
- f_3 — f_4 — верхняя ПЭЗЧ, причем $f_{-4} < f_{-3}$ и $f_3 < f_4$.

При задании требований к фильтру должны быть указаны границы полосы эффективно пропускаемых частот f_{-2} и f_2 . Требования задаются одним из рассмотренных ранее способов. Чтобы обеспечить одинаковую величину рассогласования на границах ПЭПЧ, определяем расчетный параметр f_0 («центральную» частоту полосы пропускания) по формуле:

$$f_0 = \sqrt{f_{-2} f_2}, \quad (243)$$

Зная требования к фильтру в ПЭПЧ, вычислим параметр D и величину η_2 по формуле для определения характеристического сопротивления типа Z_T или Z_{Π} фильтра нижних частот.

Теперь можно найти абсолютную ширину полосы пропускания фильтра

$$\Delta f = f_1 - f_{-1} = \frac{f_2^2 - f_0^2}{\eta_2 f_2} = \frac{(f_2 - f_0)(f_2 + f_0)}{\eta_2 f_2} \quad (244)$$

и частоты среза фильтра

$$f_{\pm 1} = \sqrt{\left(\frac{\Delta f}{2}\right)^2 + f_0^2} \pm \frac{\Delta f}{2}. \quad (245)$$

Знак «плюс» дает величину f_1 , знак «минус» — величину f_{-1} .

Параметр R определяем по тем же формулам, что и в случае фильтра нижних частот. Таким образом, все величины, необходимые для дальнейшего расчета, найдены.

Если требования к фильтру в ПЭПЧ выполнить с помощью сопротивления типа Z_T или Z_{Π} не удастся, то следует включить на входе и выходе согласовывающие Г-образные звенья типа m . Последнее может оказаться необходимым, если потребуется обеспечить малую величину коэффициента отражения на входных зажимах фильтра или соответственно большую величину затухания эха.

Применение сопротивлений типа Z_{Tm} или $Z_{\Pi m}$ с целью уменьшения колебаний рабочего затухания, обусловленного рассогласованием, чаще всего бесполезно, потому что изменение величины рабочего затухания в полосе пропускания, обусловленного потерями в элементах, оказывается значительно большим, чем изменения затухания, обусловленного рассогласованием.

Вообще же при одинаковой полосе пропускания и добротности элементов собственное затухание в полосе пропускания, обусловленное потерями в элементах, получается у пяти- и шестиэлементных звеньев значительно меньшим, чем у Т- или П-образных звеньев типа k .

Порядок расчета фильтра проиллюстрируем следующим примером.

Пример 27. Рассчитать полосовой фильтр, у которого в диапазоне частот 120—124 кГц коэффициент отражения ρ на входных зажимах не должен превышать 0,3. Рабочее затухание в диапазоне частот ниже 116 кГц должно быть не менее величины $a_{p1} = 2,8$ неп, в диапазоне частот выше 130 кГц — не менее $a_{p2} = 3,0$ неп.

Решение. 1. Вводим обозначения: $f_{-4} = 0$ кГц; $f_{-3} = 116$ кГц; $f_{-2} = 120$ кГц; $f_2 = 124$ кГц; $f_3 = 130$ кГц; $f_4 = \infty$.

2. По формулам (110), (112) и (92) находим:

$$e^{a_{ax0}} = \frac{1}{\rho};$$

$$D = \frac{e^{a_{ax0}} - 1}{e^{a_{ax0}} + 1} = \frac{1 - \rho}{1 + \rho} = \frac{1 - 0,3}{1 + 0,3} = 0,54;$$

$$\eta_2 = \sqrt{1 - D^2} = \sqrt{1 - 0,54^2} = 0,84.$$

3. Центральная частота полосы пропускания

$$f_0 = \sqrt{f_{-1} f_1} = \sqrt{120 \cdot 124} \approx 122 \text{ кГц.}$$

4. При полученных η_2 и f_0 абсолютная ширина полосы пропускания должна быть равна:

$$\begin{aligned} \Delta f &= f_1 - f_{-1} = \frac{(f_2 + f_0)(f_2 - f_0)}{\eta_2 f_2} = \\ &= \frac{(124 + 122)(124 - 122)}{0,84 \cdot 124} = 4,74 \text{ кГц.} \end{aligned}$$

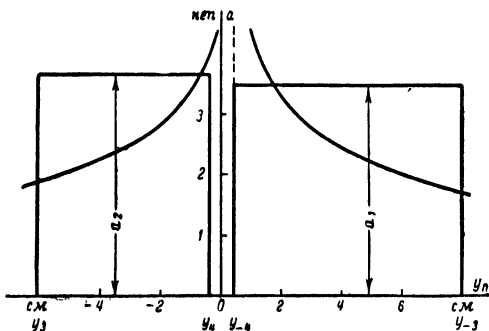


Рис. 70. К примеру 27.

5. Определяем частоты среза:

$$f_{\pm 1} = \sqrt{\left(\frac{\Delta f}{2}\right)^2 + f_0^2} \pm \frac{\Delta f}{2} = \sqrt{\left(\frac{4,74}{2}\right)^2 + 122^2} \pm \frac{4,74}{2};$$

$$f_{-1} = 119,63 \text{ кГц};$$

$$f_1 = 124,37 \text{ кГц.}$$

6. По формуле (239) переходим от переменной f к переменной y_n . Вычисление дает:

$$y_{-4} = 0,02; \quad y_{-3} = 0,4;$$

$$y_3 = -0,305; \quad y_4 = -0,02.$$

7. На листе миллиметровой бумаги строим график требований к фильтру в системе координат (y_n, a) . Масштаб: единица величины y_n соответствует отрезку оси абсцисс, равному 20 см. Единица величины a ($\Delta a = 1 \text{ неп}$) соответствует отрезку оси ординат, равному 2 см.

Результат построения показан на рис. 70, где требуемые нормы характеристического (собственного) затухания равны:

$$a_1 = a_{p1} + 0,7 = 2,8 + 0,7 = 3,5 \text{ неп};$$

$$a_2 = a_{p2} + 0,7 = 3,0 + 0,7 = 3,7 \text{ неп}.$$

Прикладывая к графику шаблон затухания, убеждаемся, что заданные требования могут быть выполнены с помощью двух одинаковых звеньев, имеющих полюс затухания при $f=0$ (рис. 60,а).

Величины элементов легко определить по приведенным ранее формулам.

31. Номограммы для определения затухания, обусловленного потерями

Окончательное заключение о влиянии потерь в элементах на величину характеристического затухания фильтра в полосе пропускания можно сделать, только изготовив макет фильтра и измерив его параметры.

Предварительную оценку влияния потерь можно выполнить, воспользовавшись полученными в § 24 формулами. Но учитывая, что полученные в результате аналитического расчета величины затухания неизбежно будут носить приближенный характер, целесообразно выполнять такие расчеты с помощью номограмм.

На рис. 71 приведены номограммы для определения характеристического затухания в полосе пропускания, обусловленного потерями, у звеньев фильтров нижних частот. Порядок пользования номограммами следующий.

Предположим, что полюс затухания звена соответствует нормированной частоте $\eta_{\infty i}$. Чтобы определить затухание звена при нормированной частоте $\eta = \eta_x$, соединяем точку $\eta_{\infty} = \eta_{\infty i}$ левой шкалы номограммы рис. 71,а с точкой $\eta = \eta_x$ средней шкалы. На правой шкале получаем вспомогательную величину $h = h_x$.

Найденное значение h_x находим на левой шкале номограммы рис. 71,б и соединяем полученную точку с точкой $\eta = \eta_x$ средней шкалы. На правой шкале получаем величину

$$A_{\Pi} = a_{\Pi} Q_a,$$

где a_{Π}' — характеристическое затухание звена, обусловленное потерями;

$Q_a = \frac{1}{d_L + d_C}$ — эквивалентная добротность элементов контура.

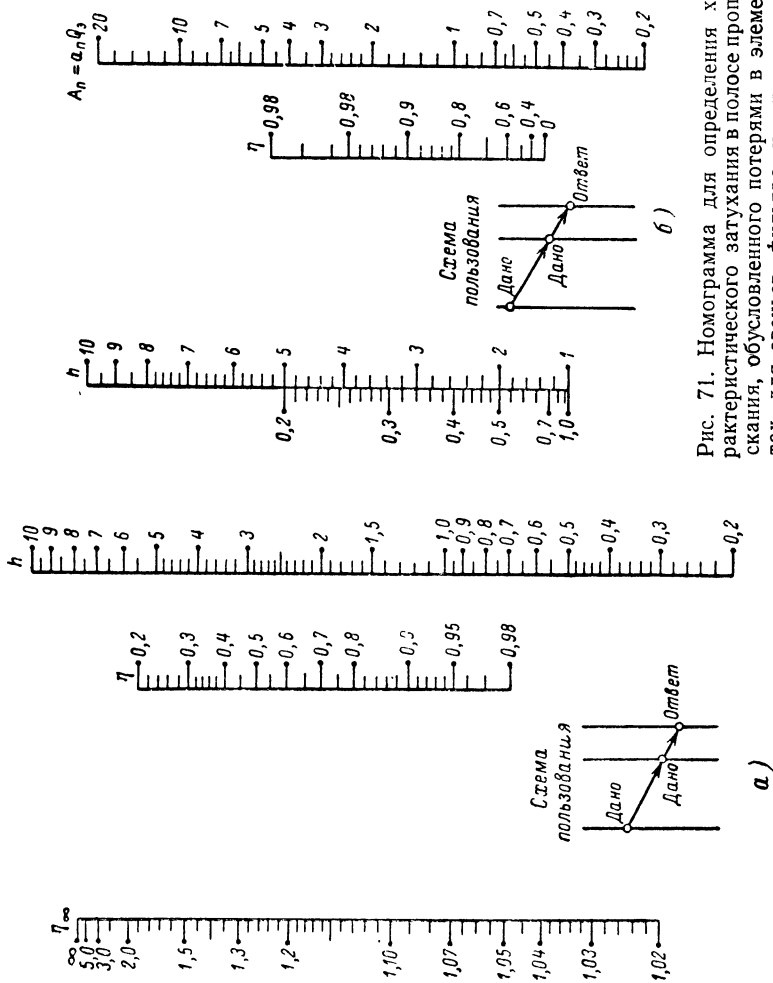


Рис. 71. Номограмма для определения характеристического затухания в полосе пропускания, обусловленного потерями в элементах, для звеньев фильтра нижних частот.

Очевидно,

$$a_{\pi} = \frac{A_{\pi}}{Q_0}.$$

Например, при $\eta_{\infty i} = 1,2$ и $\eta_x = 0,8$ $h_x = 1,4$, $A_{\pi} = 1,3$. Если $Q_0 = 10$, то $a_{\pi} = 0,13$ *нпн*.

Характеристическое затухание в полосе пропускания звеньев полосовых фильтров с несимметричными характеристиками, обусловленное потерями в элементах, можно определить с помощью номограмм рис. 72.

Но предварительно необходимо вычислить вспомогательную переменную величину $|\Omega|$, которая является функцией частоты f .

Вычисление величины $|\Omega|$ осуществляют с помощью номограммы рис. 73. С помощью этой же номограммы можно осуществить переход от переменной f к переменной y_{π} или x_{π} .

Для определения величины $|\Omega_x|$, которая соответствует частоте f_x , вычисляют параметр f_1/f_{-1} или параметр $(f_1 + f_{-1})/(f_1 - f_{-1})$ и находят соответствующую точку на левой шкале номограммы рис. 73. Затем вычисляют величину

$$\eta_x = \frac{f_x}{f_0} = \frac{f_x}{\sqrt{f_{-1}f_1}}$$

и находят соответствующую точку на средней шкале. Через обе точки проводим прямую, которая, пересекаясь с осью $|\Omega|$ (левая часть третьей шкалы), дает нам величину $|\Omega_x|$. Правая часть третьей шкалы дает величину $|y_{\pi x}|$ или $|x_{\pi x}|$.

Порядок расчета по номограмме рис. 72 таков.

Предположим, что нам требуется определить величину затухания звена при некоторой частоте f_x . Для этого находим величины η_x и Ω_x , а также величины $\eta_{\infty i}$ и $\Omega_{\infty i}$, где

$$\eta_{\infty i} = \frac{f_{\infty i}}{f_0};$$

$f_{\infty i}$ — частота полюса затухания i -го звена; $\Omega_{\infty i}$ — параметр Ω , соответствующий величине $\eta = \eta_{\infty i}$ и определяемый по номограмме рис. 73.

Соединяем точку $\Omega_{\infty i}$ на первой (левой) шкале номограммы рис. 72,а с точкой $\Omega = \Omega_x$ на второй шкале и на третьей шкале находим вспомогательную величину h_{1x} .

Переносим величину h_{1x} на левую шкалу номограммы рис. 72,б и соединяем ее прямой линией с точкой $\Omega = \Omega_x$ средней шкалы. Продолжение этой прямой, пересекаясь с правой шкалой, дает вспомогательную величину h_{2x} . Точку h_{2x} переносим на левую шкалу номограммы рис. 73,в и соединяем прямой с точкой η_x средней шкалы. Пересечение этой прямой с правой шкалой дает величину $A_{\Pi} = a_{\Pi} Q_{\Omega}$.

Номограмма рис. 72,а имеет одну особенность: каждое из значений Ω на второй шкале встречается дважды:

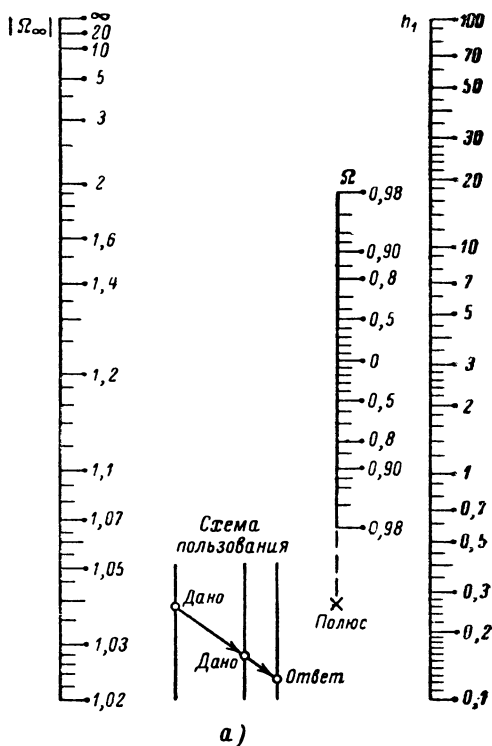


Рис. 72.

выше и ниже точки $\Omega=0$. Поэтому, отыскивая величину Ω_x на второй шкале, необходимо брать точки, расположенные в нижней части шкалы, если расчет ведется для частот, находящихся в той части полосы пропускания, которая лежит ближе к полюсу (т. е. на отрезке между f_0 и f_∞). Верхняя часть шкалы соответствует другой половине полосы пропускания (т. е. той, которая более удалена от полюса). Сказанное условно обозначено надписью «Полюс» в нижней части второй шкалы.

Если звено имеет два полюса, то величину A_n необходимо определить для каждого из полюсов и сложить полученные значения.

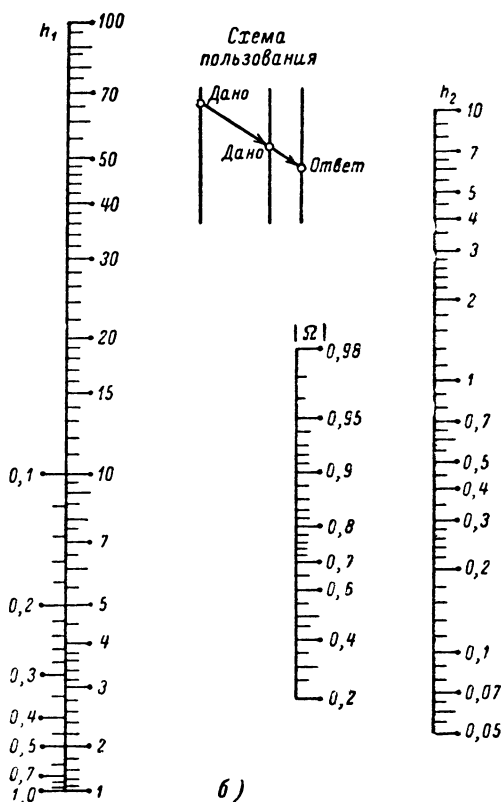


Рис. 72.

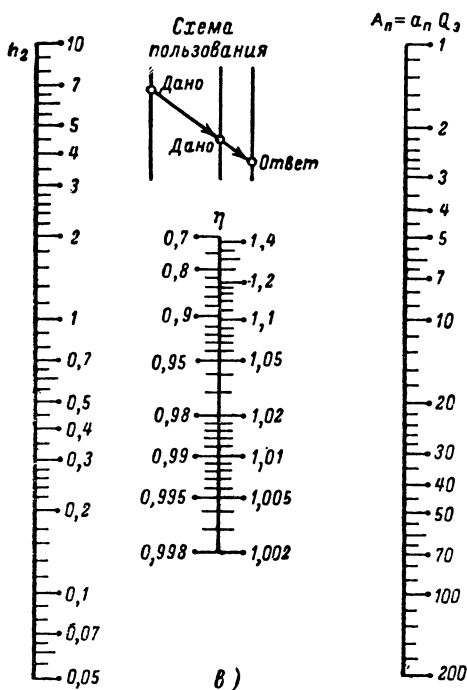


Рис. 72. Номограмма для определения характеристического затухания в полосе пропускания, обусловленного потерями в элементах, для звеньев полосовых фильтров с несимметричными характеристиками.

Для «центральной» частоты f_0 полосы пропускания диаграмма непригодна. Затухание, обусловленное потерями в элементах, на центральной частоте полосы пропускания звена с одним полюсом затухания можно определить по формуле

$$a_{\text{по}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\Omega_{\infty}^2 - 1}}{\Omega_{\infty}} \frac{f_1 + f_{-1}}{f_1 - f_{-1}} \frac{1}{Q_3}. \quad (246)$$

Для сравнения укажем, что затухание звена полосового фильтра с симметричными характеристиками на центральной частоте f_0 имеет в 2 раза бóльшую величину. (Звено с симметричными характеристиками имеет два полюса затухания.)

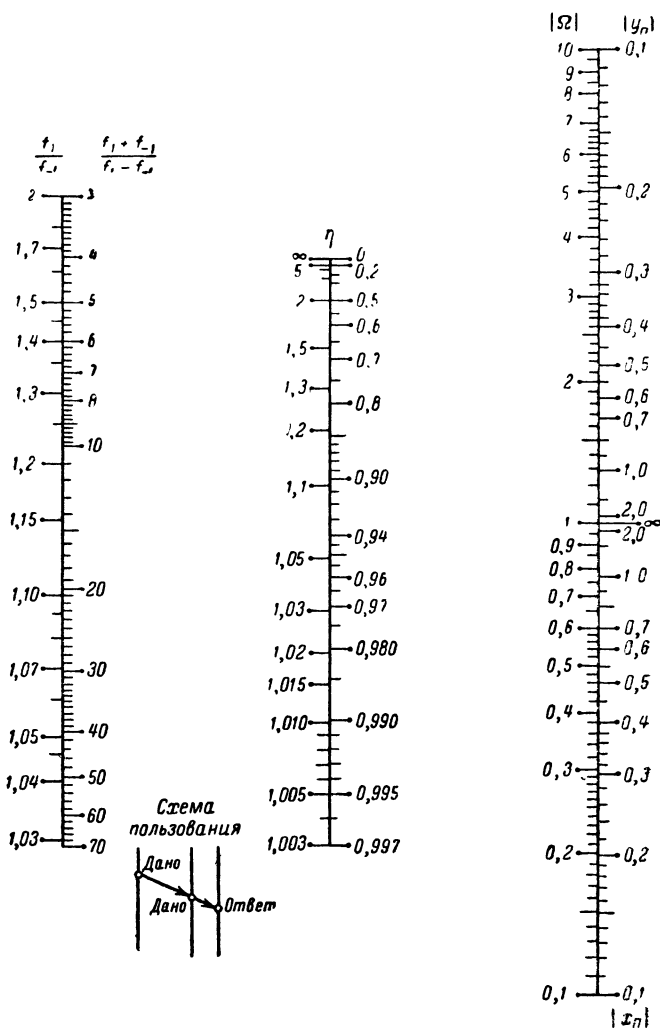


Рис. 73. Номограмма для перехода от переменной f к переменным Ω , y_n и x_n .

Пример 28. Определить характеристическое затухание, обусловленное потерями в элементах, для одного звена фильтра, рассчитанного в предыдущем примере, на частотах f_{-2} , f_2 и f_0 . Эквивалентная добротность элементов $Q_3=200$.

Решение. 1. Определяем вспомогательные параметры:

$$\eta_{-2} = \frac{f_{-2}}{f_0} = \frac{120}{122} = 0,984;$$

$$\eta_2 = \frac{f_2}{f_0} = \frac{124}{122} = 1,016;$$

$$\frac{f_1 + f_{-1}}{f_1 - f_{-1}} = \frac{124,37 + 119,63}{124,37 - 119,63} = 51,7.$$

2. По номограмме рис. 73 определяем:

$$|\Omega_{-2}| = 0,825; \quad |\Omega_2| = 0,825; \quad |\Omega_\infty| = \infty.$$

3. По номограммам рис. 72 определяем: для $f = f_{-2}$ $h_1 = 0,3$ (частота f_{-2} лежит ближе к полюсу затухания, чем f_2); $h_2 = 0,7$; $A_\Pi = 46$.

$$a_\Pi = \frac{A_\Pi}{Q_3} = \frac{46}{200} = 0,23 \text{ неп.}$$

Для $f = f_2$ $h_1 = 3,2$ (частота f_2 лежит дальше от полюса затухания, чем f_{-2}); $h_2 = 0,70$; $A_\Pi = 46$.

$$a_\Pi = \frac{46}{200} = 0,23 \text{ неп.}$$

4. По формуле (246) находим, что при $f = f_0$ $a_{\Pi 0} = 0,13 \text{ неп.}$

Звенья полосовых фильтров с симметричными характеристиками являются частным случаем звеньев с несимметричными характеристиками. Поэтому затухание в полосе пропускания звеньев полосовых фильтров с симметричными характеристиками (обусловленное потерями) можно определить также с помощью номограммы рис. 72. При этом необходимо найти затухание для каждого из двух полюсов звена и сложить найденные величины.

МОСТОВЫЕ ФИЛЬТРЫ И ИХ РАСЧЕТ

32. Схема и параметры мостового четырехполюсника

Схема мостового четырехполюсника изображена на рис. 74,а. На рисунке 74,б эта схема изображена в ином виде, чтобы пояснить происхождение ее названия. Сопротивления z_a и z_b образуют плечи моста, в одну диагональ которого включено сопротивление нагрузки, а в другую — источник входного напряжения. Противоположные плечи моста образованы одинаковыми сопротивлениями. Поэтому мостовой четырехполюсник, с целью упрощения чертежа, принято изображать на схемах так, как показано на рис. 74,в. Схема мостового четырехполюсника является симметричной относительно вертикальной и горизонтальной осей. Симметрия относительно вертикальной оси свидетельствует о равенстве характеристических сопротивлений со стороны входа и выхода:

$$Z_{c1} = Z_{c2} = Z_M.$$

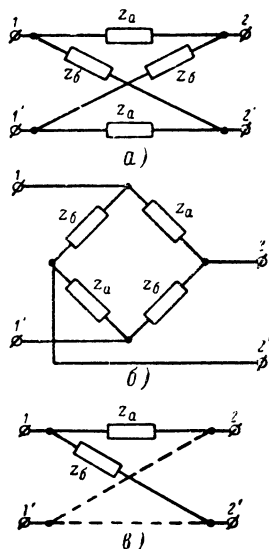


Рис. 74. Четырехполюсник мостового типа (а и б) и его условное обозначение (в)

Характеристические параметры мостового четырех- полюсника можно определить, осуществляя мысленно опыт холостого хода и короткого замыкания, например, в схеме рис. 74,б.

Характеристическое сопротивление

$$Z_M = \sqrt{z_{к.з} z_{х.х}} = \sqrt{z_a z_b}. \quad (247)$$

Характеристическая постоянная передачи

$$\operatorname{th} g = \sqrt{\frac{z_{к.з}}{z_{х.х}}} = \frac{2 \sqrt{\frac{z_a}{z_b}}}{1 + \frac{z_a}{z_b}}.$$

Сравнивая эту формулу с формулой, выражающей величину $\operatorname{th} g$ через функции половинного аргумента

$$\operatorname{th} g = \frac{2 \operatorname{th} \frac{g}{2}}{1 + \operatorname{th}^2 \frac{g}{2}},$$

приходим к выводу, что

$$\operatorname{th} \frac{g}{2} = \sqrt{\frac{z_a}{z_b}}. \quad (248)$$

Исследуем свойства мостовой схемы при условии, что сопротивления z_a и z_b являются чисто реактивными (состоят только из индуктивностей и емкостей).

Очевидно следует различать два случая: знаки сопротивлений разные (а) и знаки сопротивлений одинаковые (б).

а) Если знаки реактивных сопротивлений, z_a и z_b разные, то величина $\operatorname{th} \frac{g}{2}$ является мнимой.

Вспоминая свойства гиперболического тангенса, приходим к выводу, что в этом случае характеристическое затухание четырехполюсника должно быть равно нулю

$$\alpha = 0,$$

а характеристическая фазовая постоянная определяется формулой

$$\operatorname{tg} \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{x_a}{x_b}}, \quad (249)$$

где

$$x_a = \frac{z_a}{j} \text{ и } x_b = \frac{z_b}{j}.$$

б) Если знаки сопротивлений z_a и z_b одинаковы, то величина $\text{th} \frac{g}{2}$ является действительной и характеристическое затухание четырехполюсника уже не равно нулю. Здесь в свою очередь следует различать тоже два случая:

$$\text{при } \text{th} \frac{g}{2} < 1$$

$$\text{th} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{z_a}{z_b}}, \quad (250)$$

$$b = 0 + 2n\pi; \quad (251)$$

$$\text{при } \text{th} \frac{g}{2} > 1$$

$$\text{cth} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{z_a}{z_b}}, \quad (252)$$

$$b = \pi + 2n\pi. \quad (253)$$

Таким образом, если сопротивления z_a и z_b мостового четырехполюсника в некотором диапазоне частот имеют разные знаки, а на остальных частотах одинаковые знаки, то такой четырехполюсник будет фильтром. Учитывая сказанное, из (247) можно найти, что в полосе пропускания характеристическое сопротивление фильтра является действительной, а в полосе задерживания — мнимой величиной.

Подобно звену цепочечного фильтра мостовое звено фильтра в полосе пропускания только изменяет фазу напряжения, не меняя его амплитуды.

33. Схемы мостовых фильтров нижних частот

Исследуем мостовую схему, изображенную на рис. 75,а, для чего построим в системе координат (ω, jx) частотные зависимости сопротивлений z_a и z_b .

Очевидно, на частотах ниже резонансной частоты последовательного колебательного контура $L_b C_b$, образующего сопротивление z_b , сопротивления z_a и z_b имеют

разные знаки, что соответствует полосе пропускания. На частотах, лежащих выше резонансной частоты контура $L_6 C_6$, сопротивления z_a и z_6 имеют одинаковые знаки. Это соответствует полосе задерживания. Таким образом, рассматриваемый четырехполюсник является фильтром нижних частот. Резонансная частота контура $L_6 C_6$ будет предельной частотой (частотой среза) фильтра f_c .

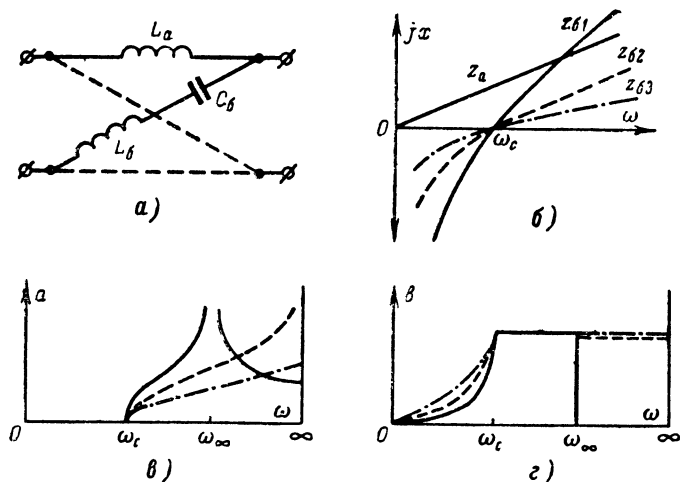


Рис. 75. Звено мостового фильтра нижних частот с характеристическим сопротивлением типа Z_T и его характеристики.

Сопротивление последовательного колебательного контура $L_6 C_6$ выражается формулой

$$z_6 = j\omega L_6 + \frac{1}{j\omega C_6} = \frac{L_6}{j\omega} (\omega_c^2 - \omega^2), \quad (254)$$

где

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{L_6 C_6}}. \quad (255)$$

При одном и том же значении резонансной частоты ω_c кривая $z_6 = \varphi(\omega)$ в зависимости от величины индуктивности L_6 может иметь большую или меньшую крутизну. (Из формулы (254) следует, что при частотах, в несколько раз превышающих резонансную, наклон кривой определяется величиной L_6 .)

Очевидно, возможны три варианта взаимного расположения кривых $z_a = \varphi_1(\omega)$ и $z_b = \varphi_2(\omega)$. Эти варианты показаны на рис. 75,б, причем предполагается, что резонансная частота контура $L_6 C_6$ остается во всех вариантах неизменной.

Первый вариант характеризуется тем, что кривые $z_a = \varphi_1(\omega)$ и $z_b = \varphi_2(\omega)$ пересекаются при некоторой конечной частоте $\omega = \omega_\infty$ (сплошная линия z_{b1} на рис. 75,б).

На этой частоте $\text{th} \frac{g}{2}$ становится равным единице, а затухание — бесконечно большой величине.

Действительно, равенство произведений величин сопротивлений противоположных плеч является условием равновесия моста. При равновесии моста ток в нагрузочной диагонали и напряжение на зажимах нагрузочного сопротивления равны нулю.

Зависимость характеристического затухания и характеристической фазовой постоянной для этого случая показаны сплошными линиями на рис. 75,в и г. При изменении частоты от ω_c до ω_∞ характеристическое затухание увеличивается от $a=0$ до $a=\infty$. При дальнейшем увеличении частоты от $\omega = \omega_\infty$ до $\omega = \infty$ характеристическое затухание монотонно убывает, стремясь к некоторому пределу.

Второй вариант характеризуется тем, что индуктивности L_a и L_b имеют одинаковую величину. Графики $z_a = \varphi_1(\omega)$ и $z_b = \varphi_2(\omega)$ пересекаются в бесконечно удаленной точке оси частот ω (штриховая линия на рисунке 75,б).

Характеристическое затухание такого звена монотонно увеличивается от нуля при $\omega = \omega_c$ до бесконечно большой величины при $\omega = \infty$.

Наконец, при третьем варианте кривые $z_a = \varphi_1(\omega)$ и $z_b = \varphi_2(\omega)$ не пересекаются ни при конечных частотах, ни в бесконечности. Этот случай изображен на рисунке штрихпунктирной линией. Характеристическое затухание такого звена монотонно возрастает от величины $a=0$ при $\omega = \omega_c$ до некоторой конечной величины при $\omega = \infty$.

Подставляя значения

$$z_a = j\omega L_a$$

и

$$z_6 = \frac{L_6}{j\omega} (\omega_c^2 - \omega^2)$$

в формулы (247) и (248), получаем:

$$Z_M = \sqrt{L_a L_6} \omega_c \sqrt{1 - \eta^2}, \quad (256)$$

$$\operatorname{th} \frac{g}{2} = \sqrt{\frac{L_a}{L_6}} \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}}, \quad (257)$$

где

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_c}.$$

Если обозначить

$$R = \sqrt{L_a L_6} \omega_c, \quad (258)$$

и

$$\sqrt{\frac{L_a}{L_6}} = m, \quad (259)$$

то окажется, что рассматриваемое звено имеет характеристическое сопротивление типа Z_T .

Выражение для характеристической постоянной передачи имеет такой же вид, как и выражение для характеристической постоянной передачи звена типа m цепочечного фильтра. Но в отличие от последнего в случае звена мостового фильтра величина m без изменения количества элементов схемы может быть взята меньше единицы, равной единице и больше единицы. Это дает возможность получить от одной и той же схемы, меняя величину m ,

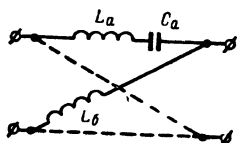


Рис. 76. Вариант
схемы звена
рис. 75.

более разнообразные характеристики затухания.

Схема, изображенная на рис. 76, не требует отдельного исследования. Все ее характеристики такие же, как у только что рассмотренной, за единственным исключением: у схемы на рис. 75, а собственная фазовая постоянная при $\omega=0$ равна нулю. А у схемы на рис. 76 при $\omega=0$ собственная фазовая постоянная равна $-\pi$ (по-

стоянный ток через ветвь с конденсатором не проходит, а идет через ветвь с одной индуктивностью).

Аналогичным образом можно исследовать свойства схемы, изображенной на рис. 77,а. Эта схема также является фильтром нижних частот. Частотой среза ω_c является резонансная частота параллельного колебательного контура $L_a C_a$. В зависимости от величины емкости C_a при одной и той же резонансной частоте параллельного контура возможны три варианта взаимного расположения кривых $z_a = \varphi_1(\omega)$ и $z_b = \varphi_2(\omega)$, показанные сплошной, штриховой и штрихпунктирной линиями на рис. 77,б. Соответствующие частотные зависимости характеристического затухания и характеристической фазовой постоянной не отличаются от изображенных на рис. 75,в и г и не требуют особых пояснений. Подставляя в формулы (247) и (248) значения

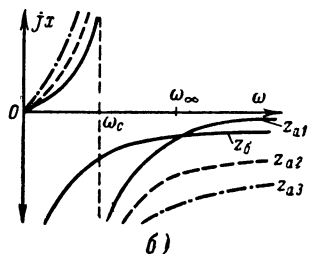
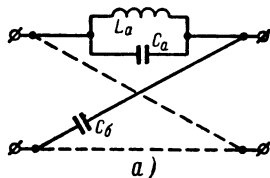


Рис. 77. Звено мостового фильтра нижних частот с характеристическим сопротивлением типа Z_{Π} .

$$z_a = \frac{j\omega}{C_a} \frac{1}{\omega_c^2 - \omega^2}$$

и

$$z_b = \frac{1}{j\omega C_b},$$

где

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{L_a C_a}},$$

получим:

$$Z_M = \frac{1}{\omega_c \sqrt{C_a C_b} \sqrt{1 - \eta^2}}, \quad (260)$$

$$\text{th} \frac{g}{2} = \sqrt{\frac{C_b}{C_a}} \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}}. \quad (261)$$

Итак, звено имеет характеристическое сопротивление типа Z , а о характеристической постоянной пере-

дачи можно сказать то же самое, что было сказано при рассмотрении предыдущего звена.

Характеристики схемы, изображенной на рис. 78, отличаются от характеристик рассматриваемой схемы только величиной фазовой постоянной при $\omega=0$. У схемы рис. 78 характеристическая фазовая постоянная при $\omega=0$ равна не нулю, как у схемы рис. 77, а, а $(-\pi)$ рад.

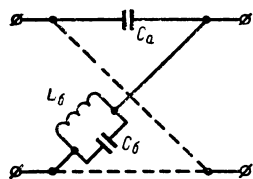


Рис. 78. Вариант схемы звена рис. 77.

Рассмотренными четырьмя схемами исчерпываются возможные схемы фильтров нижних частот, имеющие по одному элементу в одном плече и по два элемента в другом. Такие схемы будем называть элементарными.

Полученных сведений достаточно для того, чтобы составить схему фильтра, имеющего характеристическое сопротивление типа Z_T или Z_Π , не из Т- или П-образных, а из мостовых звеньев.

В самом деле, предположим, что в результате предыдущего расчета выбран тип характеристического сопротивления Z_T и найдены параметры R , f_c и m , каждого звена.

Фильтр с сопротивлением Z_T может быть составлен из звеньев рис. 75, а. Для таких звеньев, решая систему уравнений (255), (258) и (259) относительно L_a , L_b и C_b , находим:

$$L_a = Rm/\omega_c,$$

$$L_b = \frac{L_a}{m^2},$$

$$C_b = \frac{m^2}{\omega_c^2 L_a} = \frac{1}{\omega_c^2 L_b}.$$

Но на практике почти никогда не прибегают к составлению схемы фильтра из элементарных мостовых звеньев: элементарное звено мостовой схемы имеет шесть элементов вместо четырех у звена типа m цепочного фильтра. Кроме того, в случае мостовой схемы нет возможности объединения двух одинаковых по характеру элементов, относящихся к двум соседним звеньям.

Тем не менее в схемах аппаратуры мостовые фильтры встречаются довольно часто. Но особенностью применяемых схем является то, что они имеют по несколько элементов в каждом плече. Применяя эквивалентные преобразования к одиночной многоэлементной мостовой схеме, удастся уменьшить число ее элементов в два раза.

34. Основы расчета мостовых фильтров

В основе расчета мостовых фильтров лежат соотношения, которые получаются из (247) и (248) путем умножения и деления правых и левых частей этих равенств:

$$z_a = Z_m \operatorname{th} \frac{g}{2}, \quad (262)$$

$$z_b = \frac{Z_m}{\operatorname{th} \frac{g}{2}}. \quad (263)$$

Величины z_a , z_b , Z_m и $\operatorname{th} \frac{g}{2}$ в этих формулах следует рассматривать как функции частоты. Обе формулы справедливы для мостового четырехполюсника с любым числом элементов в плечах.

Итак, сопротивления плеч мостового фильтра как функции частоты выражаются через функции Z_m и $\operatorname{th} \frac{g}{2}$.

Определив любым из способов эти функции, можно получить аналитические выражения для сопротивлений z_a и z_b :

$$z_a = \varphi_1(\omega), \quad z_b = \varphi_2(\omega).$$

Располагая аналитическим выражением частотной зависимости реактивного сопротивления, легко составить (синтезировать) схему из реактивных элементов, соответствующую этому аналитическому выражению.

Отметим очень важную особенность формул (262) и (263). Функции Z_m и $\operatorname{th} \frac{g}{2}$ входят в формулы для z_a и z_b на правах отдельных множителей и, следовательно, могут быть выбраны независимо друг от друга.

Определение типа и параметров характеристического сопротивления мы подробно рассмотрели ранее. Зная величины R , f_c и m , можно составить аналитическое выражение функции $Z_c = \varphi(\eta)$ или $Z_c = \varphi_1(\omega)$.

Точно так же мы подробно рассмотрели несколько методов определения величин параметров m_v звеньев многозвенного фильтра, предполагая, что звенья включены по принципу согласования характеристических сопротивлений.

Сейчас мы можем предположить, что синтезируем многозвенный фильтр из элементарных мостовых звеньев. Зная параметр m_v и, следовательно, функцию

$\text{th} \frac{g_v}{2} = \varphi(\eta)$ каждого звена, можно найти функцию $\text{th} \frac{g}{2} = \varphi_1(\eta)$ для всего многозвенного фильтра.

А располагая такой функцией, можно синтезировать однозвенный мостовой фильтр с многоэлементными плечами, имеющий такую же характеристическую постоянную передачи $g = \tilde{f}(\eta)$, как и многозвенный фильтр.

Какой же вид имеет функция $\text{th} \frac{g}{2} = \varphi(\eta)$ в случае фильтра с несколькими полюсами затухания? Для элементарного звена мостового фильтра справедливо соотношение

$$\text{th} \frac{g_v}{2} = m_v t, \quad (264)$$

где

$$t = \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}}. \quad (265)$$

Подставляя значение $\text{th} \frac{g_v}{2}$, определяемое равенствами (264) и (265), в формулу гиперболического тангенса суммы двух аргументов

$$\text{th} \frac{g}{2} = \text{th} \frac{g_1 + g_2}{2} = \frac{\text{th} \frac{g_1}{2} + \text{th} \frac{g_2}{2}}{1 + \text{th} \frac{g_1}{2} \text{th} \frac{g_2}{2}},$$

можно найти зависимость $\text{th} \frac{g}{2} = \varphi(\eta)$ для фильтра с двумя полюсами затухания. Применив формулу тангенса

суммы двух аргументов к полученной функции $\text{th} \frac{g}{2}$ и к функции $\text{th} \frac{g_2}{2}$, характеризующей влияние третьего полюса затухания, получим зависимость $\text{th} \frac{g}{2} = \varphi_2(\eta)$ для фильтра с тремя полюсами затухания и т. д. Но нас интересует решение задачи в общем виде. Оно может быть найдено следующим образом.

Путем несложных преобразований легко доказать справедливость равенства

$$e^g = \frac{1 + \text{th} \frac{g}{2}}{1 - \text{th} \frac{g}{2}}. \quad (266)$$

С учетом (264) для N элементарных мостовых звеньев, соединенных каскадно и по принципу согласования характеристических сопротивлений, можем написать:

$$e^g = \prod_{v=1}^{v=N} \frac{1 + m_v t}{1 - m_v t} = \frac{\varphi_{\text{ч}}(t) + \varphi_{\text{н}}(t)}{\varphi_{\text{ч}}(t) - \varphi_{\text{н}}(t)} = \frac{1 + \frac{\varphi_{\text{н}}(t)}{\varphi_{\text{ч}}(t)}}{1 - \frac{\varphi_{\text{н}}(t)}{\varphi_{\text{ч}}(t)}}, \quad (267)$$

где $\varphi_{\text{ч}}(t)$ и $\varphi_{\text{н}}(t)$ — соответственно четная и нечетная части полиномов числителя и знаменателя (по переменной t).

Отношение $\varphi_{\text{н}}(t)/\varphi_{\text{ч}}(t)$ в последнем равенстве можно рассматривать как функцию $\text{th} \frac{g}{2} = f(t)$, характеризующую весь многозвенный четырехполюсник. После перехода от переменной t к переменной η и разложения многочленов числителя и знаменателя на множители функция $\text{th} \frac{g}{2}$ при четном N приобретает вид:

$$\text{th} \frac{g}{2} = \frac{\varphi_{\text{н}}(\eta)}{\varphi_{\text{ч}}(\eta)} = j m_{\text{э}N} \eta \sqrt{1 - \eta^2} \frac{(\eta_2^2 - \eta^2) \cdots (\eta_{N-2}^2 - \eta^2)}{(\eta_1^2 - \eta^2) \cdots (\eta_{N-1}^2 - \eta^2)}, \quad (268)$$

а при нечетном N

$$\operatorname{th} \frac{g}{2} = j m_{\text{э}N} \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \frac{(\eta_2^2 - \eta^2) \dots (\eta_{N-1}^2 - \eta^2)}{(\eta_1^2 - \eta^2) \dots (\eta_{N-2}^2 - \eta^2)}. \quad (269)$$

Величины η_v^2 в знаменателях обеих формул представляют собой квадраты частот, при которых лежат полюсы функций $\operatorname{th} \frac{g}{2}$. Для их определения следует заменить в функции $\varphi_{\text{ч}}(t)$ величину t^2 на Ω , приравнять полученную функцию $\varphi(\Omega)$ нулю и решить уравнение $\varphi(\Omega) = 0$.

Корни этого уравнения дадут значения t_v^2 , соответствующие полюсам функции $\operatorname{th} \frac{g}{2}$.

Величины η_v^2 определяем по формуле

$$\eta_v^2 = \frac{t_v^2}{t_v^2 - 1}. \quad (270)$$

Величины η_v^2 , фигурирующие в числителях формул (268) и (269), являются квадратами частот, при которых лежат нули функций $\operatorname{th} \frac{g}{2}$. Для их определения следует найти корни уравнения $\varphi_{\text{ч}}(\Omega) = 0$, где $\varphi_{\text{ч}}(\Omega)$ — функция, получаемая из функции $\varphi_{\text{н}}(t)$ путем почленного деления последней на t и замены в полученном выражении величины t^2 на Ω .

Корни уравнения $\varphi_{\text{ч}}(\Omega) = 0$ дают значения t_v^2 . Остается перейти к величинам η_v^2 с помощью формулы (270).

Постоянный множитель $m_{\text{э}N}$ в функциях (268) и (269) численно равен пределу, к которому стремятся значения функций при стремлении η к бесконечности. Но при η , стремящемся к бесконечности, величина t стремится к единице. Поэтому величину $m_{\text{э}N}$ можно найти, как значение функции $\varphi_{\text{н}}(t)/\varphi_{\text{ч}}(t)$, вычисленное при $t = 1$:

$$m_{\text{э}N} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\varphi_{\text{н}}(t)}{\varphi_{\text{ч}}(t)}. \quad (271)$$

Как мы убедились, вычисление частот нулей и полюсов функции $\text{th} \frac{g}{2}$ связано с решением двух уравнений, степень которых не превышает $N/2$ при четном N и $\frac{N-1}{2}$ при нечетном N .

Учитывая, что алгоритм определения корней уравнений третьей степени известен, приходим к заключению, что при известных величинах m , задача определения функции $\text{th} \frac{g}{2}$ (т. е. вычисления постоянного множителя, а также всех нулей и полюсов этой функции) всегда легко разрешима при условии, что число полюсов затухания N не превышает семи.

Если число полюсов затухания превышает семь, то задача определения нулей и полюсов усложняется. Однако решение может быть найдено и в этом случае.

Ниже приводятся аналитические выражения функции $\text{th} \frac{g}{2}$ для значений $N=2$ и 3 , а также формулы для определения всех постоянных, входящих в эти выражения.

При $N=2$

$$\text{th} \frac{g}{2} = jm_{02} \frac{\eta \sqrt{1-\eta^2}}{\eta_1^2 - \eta^2},$$

где

$$\eta_1^2 = \frac{1}{1+m_1 m_2},$$

$$m_{02} = \frac{m_1 + m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

При $N=3$

$$\text{th} \frac{g}{2} = jm_{03} \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \frac{\eta_2^2 - \eta^2}{\eta_1^2 - \eta^2},$$

где

$$\eta_1^2 = \frac{1}{1+m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3},$$

$$\eta_2^2 = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3 + m_1 m_2 m_3},$$

$$m_{03} = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_1 m_2 m_3}{1 + m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3}.$$

35. Синтез функции $\operatorname{th} \frac{g}{2}$

Один из способов получения (синтеза) функции $\operatorname{th} \frac{g}{2}$ при известных значениях коэффициентов m_v был рассмотрен в предыдущем параграфе.

Объем вычислений при расчете по этому способу быстро возрастает по мере увеличения числа полюсов затухания N . Однако если параметры m_v выбраны аналитическим способом, как изложено в § 20 (т. е. являются оптимальными), то между ними существует определенная зависимость, и это дает возможность сравнительно простым способом синтезировать функцию $\operatorname{th} \frac{g}{2}$ при любом значении N .

В этом параграфе излагается теория синтеза функции $\operatorname{th} \frac{g}{2}$ при оптимальных значениях параметров m_v .

Читатель, интересующийся только практической стороной вопроса, найдет все необходимые сведения в § 37.

Анализируя равенство (154) и сравнивая его с равенством (266), приходим к выводу, что в плоскости комплексного переменного $u = \delta + j\varepsilon$ аналитическая зависимость функции $\operatorname{th} \frac{g}{2} = \varphi(u)$ выражается формулой

$$\operatorname{th} \frac{g}{2} = \frac{\sqrt{k'_1}}{\operatorname{dn} \left(\frac{Nu}{K}, k_1 \right)}. \quad (272)$$

Здесь g — собственная постоянная передачи рассчитываемого мостового фильтра, а смысл остальных величин и связь переменной u с переменной p рассмотрены в § 20.

Подчеркнем, что параметры N, K, K_1 в (272) выбраны не произвольно, а в соответствии с изложенной в § 20 методикой и, таким образом, обеспечивают оптимальное расположение полюсов затухания фильтра.

Из (272) следует, что задача определения нулей и полюсов функции $\operatorname{th} \frac{g}{2}$ заменяется задачей определения нулей и полюсов функции $\operatorname{dn} \left(\frac{Nu}{K}, k_1 \right)$.

Ранее мы убедились, что при $k \neq 1$ функция $\operatorname{dn}(u, k)$ на действительной оси δ плоскости комплексного переменного u не имеет ни нулей, ни полюсов (см. § 20 и рис. 39). Но из теории эллиптических функций известна формула

$$\operatorname{dn}(jK' + u, k) = -j \frac{\operatorname{cn}(u, k)}{\operatorname{sn}(u, k)}. \quad (273)$$

Предположим, что переменная u в (273) является действительной величиной: $u = \delta$; $\varepsilon = 0$. Графики функций $\operatorname{sn}(u, k)$ и $\operatorname{cn}(u, k)$ для действительного значения u ($u = \delta$) и некоторого значения k изображены на рис. 79. Заметим, что изменение модуля k не влияет на положение точек, в которых функции sn и cn становятся равными -1 , 0 или $+1$. Оно (изменение k) приводит только к изменению наклона кривой в промежутках между этими точками.

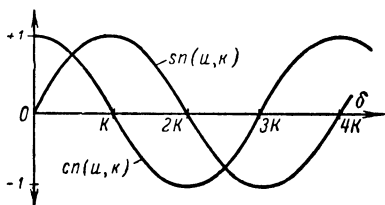


Рис. 79. Графики функций $\operatorname{sn}(u, k)$ и $\operatorname{cn}(u, k)$ при действительных значениях u ($u = \delta$).

Рассматривая рис. 79 и анализируя формулу (273), приходим к выводу, что в случае перемещения вдоль оси $u = jK'$ функция $\operatorname{dn}(u, k)$ будет иметь нули при действительной части аргумента u , равной

$$\delta_n = (2n + 1)K,$$

и полюсы — при действительной части аргумента, равной

$$\delta_{\text{пл}} = 2nK.$$

В обоих случаях n — целые положительные действительные числа, включая нуль: $n = 0, 1, 2, 3 \dots$

Мы рассматриваем функцию $\operatorname{dn}(u, K)$. Что же касается функции

$$\operatorname{dn}\left(\frac{Nu}{K}, k_1\right), \quad (274)$$

то она на отрезке от $u_1 = 0 + jK'_1$ до $u_2 = K + jK'_1$ будет иметь $N - 1$ экстремальных точек, не считая точек, расположенных на концах отрезка. С началом отрезка со-

впадает первый полюс функции, а далее нули и полюсы чередуются. Экстремальные точки лежат при

$$u_v = \delta_v + jK'_1, \quad (275)$$

где

$$\delta_v = \frac{vK}{N};$$

$$v = 0, 1, 2, \dots, N.$$

При этих же значениях u лежат экстремальные точки функции

$$\frac{\sqrt{k'_1}}{\operatorname{dn}\left(\frac{Nu}{K}, k_1, k_1\right)}, \quad (276)$$

только нули функции (274) будут полюсами функции (276), и наоборот.

На одном из этапов перехода от переменной $p = \sigma + j\omega$ к переменной $u = \delta + j\varepsilon$ была осуществлена замена переменной по формуле (150):

$$\tau = \frac{\sqrt{k'}}{\operatorname{dn}(u, k)}.$$

С учетом (273) и (274), (275) величины τ , соответствующие значениям u , определяемым формулой (275), будут равны:

$$\tau_v = j\sqrt{k'} \frac{\operatorname{sn}\left(\frac{vK}{N}, k\right)}{\operatorname{cn}\left(\frac{vK}{K}, k\right)}. \quad (277)$$

Чтобы при практических расчетах не обращаться каждый раз к таблицам эллиптических функций, целесообразно выразить функции sn и cn через тэта-функции. В результате получим:

$$\tau_v \approx j \frac{\sin \frac{v\pi}{2N} - \frac{\rho^2}{4} \sin 3 \frac{v\pi}{2N}}{\cos \frac{v\pi}{2N} + \frac{\rho^2}{4} \cos 3 \frac{v\pi}{2N}}, \quad (278)$$

где

$$v = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Между переменными τ и η существует зависимость (143):

$$\tau = \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}} \gamma.$$

Отсюда

$$\eta_v^2 = \frac{-\tau_v^2}{\gamma^2 - \tau_v^2}. \quad (279)$$

Таким образом, величины η_v^2 найдены.

Постоянный множитель искомой функции $\text{th} \frac{g}{2}$ на основании (272) равен $\sqrt{k'_1}$. Эту величину можно найти из (162), учитывая, что при $u = K_1 \operatorname{dn} \left(\frac{N u}{K}, k_1 \right) = k'_1$:

$$\sqrt{k'_1} = \frac{2^{N-1} - p^N}{2^{N-1} + p^N}. \quad (279a)$$

36. Синтез реактивного двухполюсника

Из теории электрических цепей известно, что сопротивление многоэлементного реактивного двухполюсника может быть представлено дробно-рациональной функцией вида

$$z(\omega) = \frac{k}{j\omega} \frac{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2) \dots (\omega_{2N+1}^2 - \omega^2)}{(\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_4^2 - \omega^2) \dots (\omega_{2N}^2 - \omega^2)}, \quad (280)$$

где ω — текущая частота;

k — положительный действительный множитель;

ω_i — так называемые резонансные частоты двухполюсника, причем $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 \dots < \omega_{2N+1}$, а степень числителя отличается от степени знаменателя не более чем на единицу (в большую или меньшую сторону).

Дробно-рациональную функцию (280) можно представить в виде суммы целой части ($k''_0\omega$) и $N+1$ элементарных дробей (по числу сомножителей знаменателя). Элементарные дроби имеют вид:

$$\frac{k'_0}{\omega} \text{ и } k_{2i} \frac{j\omega}{\omega_{2i}^2 - \omega^2},$$

где k''_0 , k'_0 и k_{2i} — положительные действительные коэффициенты;

ω_{2i} — корни знаменателя, т. е. значения частоты ω , при которых знаменатель обращается в нуль.

Запишем результат разложения функции (280) на элементарные дроби, обозначив постоянные коэффициенты не буквами k , а буквами L и $1/C$:

$$\begin{aligned} z(\omega) &= \frac{k}{j\omega} \frac{(\omega_1^2 - \omega^2) \dots (\omega_{2N+1}^2 - \omega^2)}{(\omega_2^2 - \omega^2) \dots (\omega_{2N}^2 - \omega^2)} = \\ &= j\omega L''_0 + \frac{1}{j\omega C''_0} + \frac{1}{C_2} \frac{j\omega}{(\omega_2^2 - \omega^2)} + \dots + \frac{1}{C_{2N}} \frac{j\omega}{(\omega_{2N}^2 - \omega^2)}. \end{aligned} \quad (281)$$

Анализируя полученное выражение (281), убеждаемся, что функция $z(\omega)$ представлена в виде суммы функций, каждую из которых можно рассматривать как аналитическое выражение сопротивления простейшего реактивного двухполюсника.

Первое слагаемое в правой части равенства представляет собой сопротивление катушки индуктивности L''_0 , второе — сопротивление емкости C''_0 , а каждое из остальных слагаемых — сопротивление параллельного колебательного контура, имеющего емкость C_{2i} и резонансную частоту ω_{2i} .

Поскольку функция, выражающая сопротивление двухполюсника, представлена в виде суммы более простых функций, постольку можно считать, что двухполюсники, соответствующие этим простым функциям, соединены последовательно (при последовательном соединении двухполюсников общее сопротивление равно сумме всех сопротивлений соединенных двухполюсников).

Поэтому выражению (281) соответствует электриче-

ская схема, изображенная на рис. 80. Величины элементов схемы могут быть найдены по известным формулам разложения дробно-рациональной функции на элементарные дроби:

$$L''_0 = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{z(\omega)}{j\omega}; \quad (282)$$

$$\frac{1}{C''_0} = \lim_{\omega \rightarrow 0} z(\omega) j\omega; \quad (283)$$

$$\frac{1}{C_{2i}} = \lim_{\omega \rightarrow \omega_{2i}} \frac{z(\omega) (\omega_{2i}^2 - \omega^2)}{j\omega}. \quad (284)$$

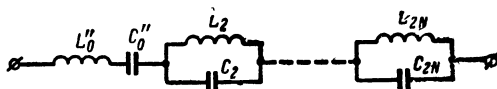


Рис. 80. Схема двухполюсника, реализующая заданную частотную зависимость сопротивления $z = \varphi(\omega)$.

Теперь для каждого из параллельных колебательных контуров мы знаем резонансную частоту ω_{2i} и величину емкости C_{2i} . Очевидно,

$$L_{2i} = \frac{1}{\omega_{2i}^2 C_{2i}}. \quad (285)$$

При вычислении величин L''_0 и $\frac{1}{C''_0}$ по формулам (282) и (283) может оказаться, что первая или вторая из них или первая и вторая одновременно равны нулю. Это означает, что в схеме двухполюсника рис. 80 отсутствует соответственно индуктивность L''_0 , или емкость C''_0 , или оба эти элемента.

Можно найти другую схему двухполюсника с такой же частотной зависимостью сопротивления, как и у схемы вида рис. 80. Для этого разложим на элементарные дроби не функцию $z(\omega)$, а обратную ей функцию

$$y(\omega) = 1/z(\omega),$$

которую можно рассматривать как аналитическое выражение частотной зависимости проводимости некоторой цепи:

$$y(\omega) = \frac{j\omega}{k} \frac{(\omega_2^2 - \omega^2) \dots (\omega_{2N}^2 - \omega^2)}{(\omega_1^2 - \omega^2) \dots (\omega_{2N-1}^2 - \omega^2)} =$$

$$= j\omega C'_0 + \left(\frac{1}{j\omega L'_0} \right) + \frac{j\omega}{L_1(\omega_1^2 - \omega^2)} + \dots + \frac{j\omega}{L_{2N-1}(\omega_{2N-1}^2 - \omega^2)}. \quad (286)$$

Чтобы получить более общий результат, мы предположили в данном случае, что степень числителя по-прежнему остается выше степени знаменателя, а коэффициенты при элементарных дробях обозначили такими буквами, которые облегчают переход от формулы к схеме.

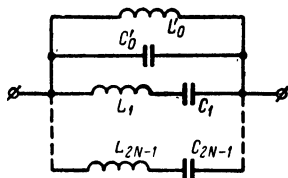


Рис. 81. Вариант схемы двухполюсника.

В скобки в правой части равенства (286) взято слагаемое, которое при заданном виде функции $y(\omega)$ равно нулю, но обязательно появляется в разложении, если функция $y(\omega)$ имеет в знаменателе множитель $j\omega$.

Итак, функция $y(\omega)$ представлена в виде суммы элементарных дробей, каждую из которых можно рассматривать как аналитическое выражение проводимости элементарного двухполюсника: первое слагаемое в правой части разложения является проводимостью емкости C'_0 , второе — проводимостью индуктивности L'_0 , каждое из остальных — проводимостью последовательного колебательного контура, имеющего индуктивность L_{2i-1} и резонансную частоту ω_{2i-1} .

Вспоминая, что проводимость разветвления равна сумме проводимостей ветвей, можно составить схему, соответствующую разложению (286). Такая схема изображена на рис. 81. Величины элементов схемы могут быть найдены по формулам

$$C'_0 = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{y(\omega)}{j\omega}; \quad (287)$$

$$1/L'_0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} y(\omega) \cdot j\omega; \quad (288)$$

$$1/L_{2i-1} = \lim_{\omega \rightarrow \omega_{2i-1}} \frac{y(\omega)(\omega_{2i-1}^2 - \omega^2)}{j\omega}. \quad (289)$$

$$C_{2i-1} = \frac{1}{\omega_{2i-1}^2 L_{2i-1}}. \quad (290)$$

В частном случае емкость C'_0 , или индуктивность L'_1 , или оба эти элемента могут отсутствовать.

Следует иметь в виду, что двумя найденными схемами не исчерпывается все многообразие схем двухполюсников, имеющих заданную частотную зависимость сопротивления. Но сказанного вполне достаточно для синтеза мостового фильтра в двух вариантах.

Читатель, вероятно, заметил разницу в структуре рассмотренных схем. Первая схема состоит из ряда параллельных контуров, включенных последовательно. Кроме того, последовательно с контурами может быть включена одна индуктивность и одна емкость.

Вторая схема состоит из нескольких последовательных контуров, включенных параллельно. Кроме того, параллельно с ними может быть включена одна индуктивность и одна емкость. Таким образом, обе схемы состояются по определенным правилам (канонам) и поэтому в литературе часто называются каноническими схемами Фостера.

Из схем физической реализации функций (281) и (286) следует, что в канонических схемах Фостера число элементов всегда на единицу больше, чем общее число резонансов, которое равно числу сомножителей вида $(\omega_k^2 - \omega^2)$ в числителе и знаменателе функции $z(\omega)$. Кроме того, если функция $z(\omega)$ обращается в нуль при $\omega=0$, то в схеме двухполюсника обязательно должен быть путь постоянному току.

Знание этих правил дает возможность начертить схему двухполюсника по одному виду функции $z(\omega)$, не прибегая к ее разложению на дроби. Иными словами, появляется возможность определить, имеются ли в схеме двухполюсника элементы L'_0 и C'_0 или L''_0 и C''_0 .

Покажем на примере, как применить сказанное к синтезу сопротивлений z_a и z_b плеч мостового фильт-

ра. Предположим, что характеристическое сопротивление фильтра должно соответствовать типу Z_T :

$$Z_M = R \sqrt{1 - \eta^2},$$

а функция $\operatorname{th} \frac{g}{2}$ — фильтру, имеющему два полюса затухания ($N=2$).

В конце § 34 приведены аналитические выражения функции для значений $N=2$ и 3. При $N=2$ имеем:

$$\operatorname{th} \frac{g}{2} = jm_{32} \eta \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{\eta_1^2 - \eta^2},$$

где

$$\eta_1^2 = \frac{1}{1 + m_1 m_2} < 1.$$

В соответствии с формулой (262) находим:

$$z_a = Z_M \operatorname{th} \frac{g}{2} = jRm_{32} \eta \frac{1 - \eta^2}{\eta_1^2 - \eta^2}. \quad (291)$$

Заменяв в формуле (291) переменную η на $\omega = \eta \omega_c$, полученное выражение можно рассматривать как сопротивление двухполюсника, имеющего две резонансные частоты (η_1 и 1). Такой двухполюсник состоит из трех элементов. Поскольку при $\omega=0$ $z_a=0$, в схеме двухполюсника должен быть путь постоянному току, и схема может иметь вид, показанный на рис. 82, а или б. Величины элементов можно вычислить по формулам (282) — (285) или (287) — (290).

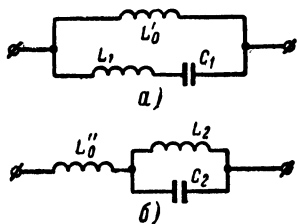


Рис. 82. К примеру синтеза сопротивления z_a .

Сопротивление z_b найдем из соотношения (263):

$$z_b = \frac{Z_M}{\operatorname{th} \frac{g}{2}} = \frac{R(\eta_1^2 - \eta^2)}{jm_{32} \eta}. \quad (292)$$

Полученную формулу после замены η на $\omega = \omega_c \eta$ можно рассматривать как аналитическое выражение сопротивления последовательного колебательного контура.

Предположим в качестве второго примера, что требуется синтезировать фильтр, функция $\text{th} \frac{g}{2}$ которого соответствует значению $N=2$, а характеристическое сопротивление должно быть типа Z_{Tm} при $m=m_c$.

Формулу частотной зависимости Z_{Tm} преобразуем следующим образом:

$$Z_{Tm} = \frac{RV \sqrt{1-\eta^2}}{1-(1-m_c^2)\eta^2} = \frac{RV \sqrt{1-\eta^2}}{(1-m_c^2)(\eta_c^2-\eta^2)}, \quad (293)$$

где

$$\eta_c^2 = \frac{1}{1-m_c^2}. \quad (294)$$

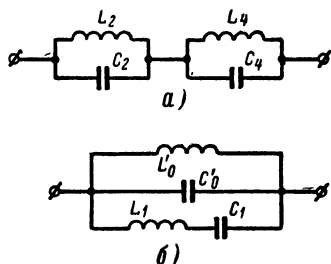


Рис. 83. Варианты схемы четырехэлементного двухполюсника.

Напомним, что величину m_c находят, исходя из требований к фильтру в ПЭПЧ, и в случае мостового фильтра она совершенно не связана со значениями m , определяемыми, исходя из требований к фильтру в ПЭЗЧ. Теперь (при $Z_m = Z_{Tm}$) функция z_a приобретает вид:

$$z_a = Z_{Tm} \text{th} \frac{g}{2} = j \frac{Rm_{a2}\eta}{1-m_c^2} \frac{1-\eta^2}{(\eta_1^2-\eta^2)(\eta_c^2-\eta^2)}.$$

Функция z_a имеет один нуль числителя (не считая нуля числителя при $\eta=0$) и два нуля знаменателя и реализуется в виде четырехэлементной схемы. Схема должна обеспечивать путь постоянному току. Два возможных варианта схемы показаны на рис. 83, а и б.

Для сопротивления z_b находим:

$$z_b = \frac{R}{jm_{a2}\eta(1-m_c^2)} \frac{\eta_1^2-\eta^2}{\eta_c^2-\eta^2}.$$

Сопротивление z_b является трехэлементным двухполюсником.

Если предполагается выполнить фильтр с характеристическим сопротивлением типа $Z_{\Pi m}$, то для удобства синтеза сопротивлений z_a и z_b функцию сопротивления $Z_{\Pi m}$ необходимо преобразовать таким же образом, как и функцию сопротивления Z_{Tm} :

$$Z_{\Pi m} = \frac{R[1 - (1 - m_c^2)\eta^2]}{\sqrt{1 - \eta^2}} = \frac{R(1 - m_c^2)(\eta_c^2 - \eta^2)}{\sqrt{1 - \eta^2}}, \quad (295)$$

где

$$\eta_c^2 = \frac{1}{1 - m_c^2}.$$

О практической стороне синтеза двухполосника заметим следующее.

Зависимости Z_m и $\text{th} \frac{g}{2}$ в ходе расчета мы находим, как функции переменной η . Поэтому аналитические выражения сопротивлений z_a и z_b оказываются также функциями переменной η . Чтобы получить эти выражения в виде функций переменной ω , следует заменить в них переменную η на переменную ω :

$$\omega = \omega_c \eta. \quad (296)$$

Однако удобнее осуществлять синтез двухполосников, не прибегая к такой замене, а рассматривая переменную η как абсолютную, а не нормированную частоту (при этом приходится оперировать с меньшими величинами, что упрощает вычисления). Двухполосники, полученные в результате такого расчета, будут соответствовать фильтру с частотой среза $\omega'_c = 1$. Чтобы перейти от полученной схемы к схеме фильтра, имеющей частоту среза $\omega = \omega_c$, следует величины всех индуктивностей и емкостей в схемах двухполосников разделить на ω_c .

37. Расчет и практические схемы мостовых фильтров

Обобщая сказанное в предыдущих параграфах, можно предложить такой порядок расчета мостового фильтра.

1. Исходя из требований к фильтру в полосе эффективно пропускаемых частот, определяем параметры R , f_c и m функции характеристического сопротивления фильтра. Способ определения этих величин не отличается от применяемого при расчете цепочечных фильтров (см. § 15).

2. Определив величины R , f_c и m , выбираем тип характеристического сопротивления (Z_T или Z_{Π} , Z_{Tm} или $Z_{\Pi m}$) и записываем аналитическое выражение частотной зависимости характеристического сопротивления

$$Z_c = \varphi(\eta).$$

3. Зная величину f_c , вычисляем нормированные частоты η_3 и η_4 , соответствующие границам полосы эффективно задерживаемых частот.

4. Исходя из требований к фильтру в полосе эффективно задерживаемых частот, определяем количество и положение полюсов затухания фильтра.

Способы определения остаются те же, что и при расчете цепочечных фильтров (по семейству кривых $a = \varphi_1(\eta)$, аналитический, с помощью шаблона). Следует иметь в виду, что схема полузвена в мостовом варианте не может быть реализована. Поэтому при аналитическом способе расчета необходимо округлять найденную по формуле (128) величину N' до ближайшего целого числа. Точно так же при расчете по семейству кривых $a = \varphi_1(\eta)$ можно выбирать только такие кривые, которые относятся к целому звену, а не к половине звена.

Наконец, при расчете с помощью шаблона можно работать только с шаблоном затухания целого звена (а не половины звена). Поясним, что хотя этот этап расчета мостового фильтра внешне не отличается от аналогичного этапа расчета цепочечного фильтра, однако сам расчет имеет несколько иной смысл: в то время как при цепочечном фильтре каждый полюс затухания реализуется с помощью отдельного звена, в случае мостового фильтра с помощью одного четырехполюсника будут реализованы все полюсы затухания. Разумеется, в случае мостового фильтра также возможна реализация каждого полюса затухания с помощью одного элементарного мостового звена, но такие схемы фильтров применяются редко.

5. Зная величины m_v , которые характеризуют положение полюсов затухания фильтра, находим функцию

$$\operatorname{th} \frac{g}{2} = \varphi(\eta).$$

Сделать это можно двумя способами:

а) исходя из величин m_v , вычислить постоянный множитель, а также нормированные частоты полюсов и нулей затухания функции $\operatorname{th} \frac{g}{2}$ по формулам, приведенным в конце § 34;

б) при оптимальном расположении полюсов затухания (т. е. при определении величин m_v аналитическим способом) параметры функции $\operatorname{th} \frac{g}{2}$ можно вычислить по формулам (278) и (279), (279а).

6. По формулам (262) и (263) находим аналитические выражения частотной зависимости сопротивлений z_a и z_b , образующих плечи схемы мостового фильтра.

7. Получив формулы $z_a = \varphi_1(\eta)$ и $z_b = \varphi_2(\eta)$, синтезируем двухполюсники любым методом. В частности, можно воспользоваться методом, рассмотренным в § 36, где было показано, как получить две разные схемы, реализующие заданную формулу.

Из двух схем реализации выбирают такую, которая по тем или иным соображениям (например, с точки зрения величин элементов) оказывается более приемлемой.

8. Расчет фильтров верхних частот, а также полосовых и заграждающих с симметричными характеристиками затухания можно осуществить, применяя метод преобразования частоты, рассмотренный нами ранее.

При расчете полосового фильтра с несимметричной характеристикой затухания следует найти непосредственно функцию $\operatorname{th} \frac{g}{2} = \varphi(\eta)$ для всего фильтра, исходя из того, что функция $\operatorname{th} \frac{g}{2}$, характеризующая один полюс затухания, имеет вид:

$$\operatorname{th} \frac{g_v}{2} = \pm m_v t_v, \quad (297)$$

где

$$m_{\text{пв}} = \sqrt{\frac{\eta_1^2 - \eta_{\infty}^2}{\frac{1}{\eta_1^2} - \eta_{\infty}^2}};$$

$$t_{\text{н}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{\eta_1^2} - \eta^2}{\eta_1^2 - \eta^2}};$$

$$\eta = \frac{f}{f_0}; \quad \eta_1 = \frac{f_1}{f_0};$$

$$\eta_{\infty} = \frac{f_{\infty}}{f_0};$$

f_{-1} и f_1 — верхняя и нижняя частоты среза,

$$f_0 = \sqrt{f_{-1} f_1}.$$

Знак «плюс» в формуле (297) относится к случаю, когда полюс затухания лежит в верхней полосе задерживания, знак «минус» — к случаю, когда полюс затухания лежит в нижней полосе задерживания.

Определение частот полюсов затухания η_{∞} удобно осуществлять с помощью шаблона.

9. С целью уменьшения числа элементов и облегчения настройки рассчитанный фильтр целесообразно выполнять не в виде мостовой (рис. 84,а), а в виде дифференциально-мостовой (рис. 84,б) или Т-образной мостовой (рис. 84,в) схем. Последнюю часто называют также «перекрытой мостовой» схемой. Соотношения между величинами элементов перечисленных схем ясны из рис. 84.

Поясним, что для увеличения сопротивления какого-либо двухполюсника в 2 раза (без изменения частот нулей и полюсов) следует увеличить в два раза величины всех индуктивностей и уменьшить в два раза величины всех емкостей двухполюсника. Для уменьшения сопро-

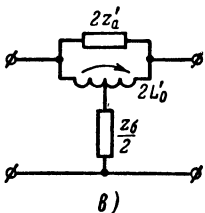
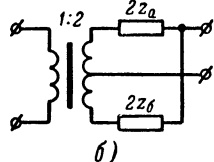
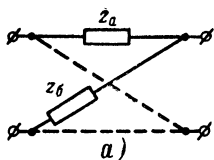


Рис. 84. Варианты схем мостовых фильтров.

тивления двухполюсника, наоборот, уменьшаем величины индуктивностей и увеличиваем величины емкостей.

В состав дифференциально-мостовой схемы входит дифференциальный трансформатор. Очевидно, затухание этого трансформатора во всей полосе эффективно пропускаемых фильтром частот должно быть достаточно малой и, по возможности, постоянной величиной.

Выполнить фильтр в виде Т-образной мостовой схемы можно только в том случае, если схема двухполюсника z_a соответствует типу, показанному на рис. 81, и содержит индуктивность L'_0 . Символом $2z'_a$ на рис. 84, в обозначена схема двухполюсника, которая получится из схемы двухполюсника $2z_a$ в результате исключения из последней индуктивности $2L'_0$. Сопротивление $z_6/2$ подключается

к средней точке катушки индуктивности $2L'_0$. Коэффициент связи k между двумя половинами катушки $2L'_0$ должен быть равен единице. (Практически удается получить значения k несколько меньшие единицы).

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ВКЛЮЧЕНИЕ ФИЛЬТРА МЕЖДУ НЕОДИНАКОВЫМИ НАГРУЗОЧНЫМИ СОПРОТИВЛЕНИЯМИ

38. Фильтр как согласующий четырехполюсник

В технике связи нередко возникает задача передать от генератора с заданным внутренним сопротивлением R_1 максимально возможную мощность сопротивлению нагрузки R_2 , величина которого не равна R_1 .

Решение сводится к тому, что между обоими сопротивлениями включают реактивный четырехполюсник, рассчитанный таким образом, чтобы его входное сопротивление со стороны зажимов 1-1' было равно величине R_1 при нагрузке зажимов 2-2' на сопротивление R_2 (рис. 85, а). Примерами такого четырехполюсника являются трансформатор, отрезок однородной цепи длиной в четверть длины волны, параллельный колебательный контур с отводом от части индуктивности или от средней точки двух емкостей,

образующих емкостную ветвь контура. Трансформатор позволяет получить удовлетворительное согласование в довольно широком (несколько октав) диапазоне частот. Контур и четвертьволновая цепь тео-

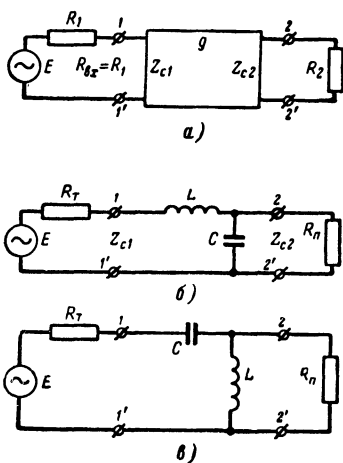


Рис. 85. Г-образное звено как согласующий четырехполюсник.

ретически обеспечивают согласование на одной расчетной частоте, а практически — в узкой полосе частот, не превышающей нескольких процентов от расчетной.

Согласование двух активных (действительных) сопротивлений в узкой полосе частот можно осуществить также с помощью Г-образного звена фильтра. Рассмотрим случай согласования с помощью звена фильтра нижних частот. Заданными являются величины сопротивлений R_1 и R_2 и частота f_1 , на которой должно быть получено согласование этих сопротивлений. Обозначим большее из сопротивлений R_1 и R_2 символом R_{Π} , меньшее — символом R_T и составим схему рис. 85,б, в которой Г-образное звено фильтра нижних частот будет согласующим четырехполюсником.

Если выбрать величины L и C так, чтобы на частоте f_1 характеристическое сопротивление четырехполюсника со стороны зажимов 2-2' ($Z_{c_2} = Z_{\Pi}$) было действительной величиной и равнялось R_{Π} , а со стороны зажимов 1-1' ($Z_{c_1} = Z_T$) равнялось величине R_T , то, очевидно, требуемый эффект согласования будет достигнут. Действительно, при $Z_H = Z_{c_2} = Z_{\Pi}$ входное сопротивление четырехполюсника будет равно величине $Z_{вх} = Z_{c_1} = Z_T$. Потери мощности в элементах согласующего четырехполюсника отсутствуют, и, следовательно, вся энергия, поступающая на вход четырехполюсника, попадет в сопротивление нагрузки.

Для определения величин элементов Г-образного звена приравняем друг другу величины R_T и $Z_{c_1} = Z_T$ звена, а также R_{Π} и $Z_{c_2} = Z_{\Pi}$, полагая, что это равенство должно иметь место при нормированной частоте $\eta = \eta_1 = \frac{f_1}{f_c}$:

$$\left. \begin{aligned} R_T &= R \sqrt{1 - \eta_1^2}; \\ R_{\Pi} &= \frac{R}{\sqrt{1 - \eta_1^2}}. \end{aligned} \right\}$$

Из полученной системы уравнений можно, при заданных R_T , R_{Π} и f_1 , найти параметры R и f_c Г-образного звена, а зная их — определить величины L и C по формулам для звена фильтра нижних частот.

Окончательные расчеты формулы имеют вид:

$$C = \frac{1}{\omega_1 R_{\Pi}} \sqrt{\frac{R_{\Pi} - R_T}{R_T}};$$

$$L = \frac{1}{\omega_1} \sqrt{R_T (R_{\Pi} - R_T)}$$

или

$$L = R_{\Pi} R_T C,$$

где

$$\omega_1 = 2\pi f_1.$$

В некоторых случаях более приемлемые величины элементов согласующего четырехполюсника можно получить, заменив звено фильтра нижних частот Г-образным звеном фильтра верхних частот (см. рис. 85, в). В этой схеме емкость C одновременно может выполнять функции разделительной.

Расчетные формулы имеют вид:

$$C = \frac{1}{\omega_1 \sqrt{R_T (R_{\Pi} - R_T)}};$$

$$L = \frac{R_{\Pi}}{\omega_1 \sqrt{\frac{R_{\Pi} - R_T}{R_T}}} = C R_{\Pi} R_T.$$

Хотя теоретически полное согласование с помощью Г-образного звена может быть обеспечено только на одной частоте f_1 , практически согласование оказывается достаточно хорошим в пределах всей той полосы частот, для которой величина η мало отличается от η_1 .

39. Включение фильтра между неодинаковыми нагрузочными сопротивлениями

На протяжении всей книги мы рассматривали случай включения фильтра между одинаковыми нагрузочными сопротивлениями $R_r = R_n = R$.

Если нагрузочные сопротивления имеют разную величину, изменить которую не представляется возможным, то при расчете фильтра можно прибегнуть к одному из следующих приемов.

1. Рассчитать симметричный фильтр, а на входе или выходе его включить согласующий трансформатор.

2. Иногда удается обойтись без трансформатора, применив антисимметричную схему фильтра.

3. Воспользоваться преобразованием схемы фильтра с помощью идеального трансформатора.

К сожалению, к цепочечным схемам фильтров нижних и верхних частот, составленным из звеньев типа k и типа m , это преобразование применить нельзя.

4. Применить изложенный ниже способ расчета:

а) рассчитать обычным способом фильтр для работы между одинаковыми нагрузочными сопротивлениями $R=R_r$. Количество, тип и порядок следования звеньев выбрать таким образом, чтобы схема фильтра была симметричной относительно вертикальной оси. Практически это значит, что, например, в случае трехзвенного фильтра коэффициенты m должны быть одинаковыми, по крайней мере, у двух звеньев;

б) составить симметричную схему, соединяя звенья по принципу согласования характеристических сопротивлений, и провести на чертеже ось симметрии (считаем, что генератор расположен в левой части схемы, а сопротивление нагрузки — в правой);

в) найти коэффициент преобразования n :

$$n = \frac{R_n}{R_r} = \frac{R_n}{R}$$

(величина n может быть как больше, так и меньше единицы);

г) значения всех индуктивностей, расположенных справа от оси симметрии, увеличить в n раз, значения всех емкостей уменьшить в n раз. Сопротивление нагрузки сделать равным $R_n = nR$;

д) осуществить приведение схемы, т. е. заменить каждые две индуктивности или емкости, соединенные последовательно или параллельно, одной эквивалентной. На этом расчет заканчивается;

е) в результате рассмотренного преобразования рабочее затухание фильтра (при $R_r=R$ и $R_n=nR$) увеличивается по сравнению со случаем $R_r=R_n=R$ на всех частотах на одинаковую величину:

$$\Delta a_p = \ln \left| \frac{1+n}{2} \right|.$$

Напомним, что такое увеличение рабочего затухания свидетельствует об уменьшении мощности, получаемой сопротивлением нагрузки, в $\left(\frac{1+n}{2}\right)^2$ раз. Что же касается напряжения на нагрузке, то оно увеличивается (по

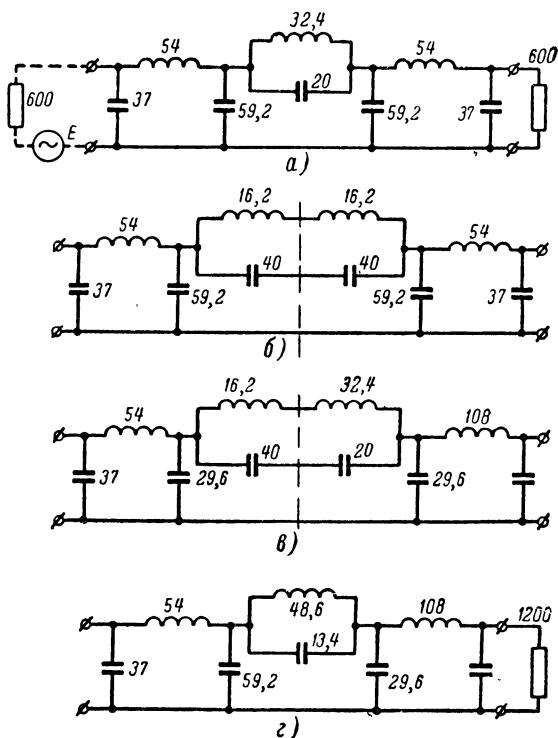
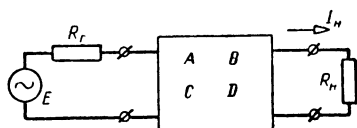


Рис. 86. Преобразование схемы фильтра для включения между неодинаковыми нагрузочными сопротивлениями. (Величины индуктивностей указаны в мГн, емкостей — в нФ. Конденсатор, включенный параллельно нагрузке (в, г), имеет емкость 18,5 нФ.)

сравнению со случаем $R_{\Gamma} = R_{\Pi} = R$) в $\frac{n(1+n)}{2}$ раз при $n > 1$ и уменьшается во столько же раз при $n < 1$.

В качестве примера преобразуем схему фильтра нижних частот из двух звеньев типа k и одного звена типа

m (рис. 86,а). Схема рассчитана для случая включения между сопротивлениями $R_{\Gamma}=R_{\Pi}=600$ ом. Необходимо преобразовать ее для включения между сопротивлениями $R_{\Gamma}=600$ ом, $R_{\Pi}=1\,200$ ом. На рис. 86,б показана эта же схема, разделенная на две симметричные части, а на рис. 86,в — схема с преобразованными величинами элементов



$$n = \frac{R_{\Pi}}{R_{\Gamma}} = \frac{1\,200}{600} = 2.$$

Рис. 87. К понятию о сопротивлении передачи.

Объединив в схеме в) одинаковые по характеру элементы, получим схему рис. 86,г.

Обоснование рассмотренного метода следующее. Рабочая постоянная передачи может быть выражена формулой [Л. 7]

$$g_p = \frac{1}{2} \ln \frac{Z_{\text{прив}}^2}{4R_{\Gamma}R_{\Pi}}, \quad (298)$$

где $Z_{\text{прив}}$ — „приведенное сопротивление“ или „сопротивление передачи“, определяемое формулой

$$Z_{\text{прив}} = \frac{E}{I_n}.$$

Смысл величин R_{Γ} , R_{Π} , E и I_n ясен из рис. 87. В свою очередь сопротивление передачи $Z_{\text{прив}}$ связано с параметрами схемы рис. 87 соотношением

$$Z_{\text{прив}} = A_{\varepsilon}R_{\Pi} + B_{\varepsilon} + C_{\varepsilon}R_{\Pi}R_{\Gamma} + D_{\varepsilon}R_{\Gamma}, \quad (299)$$

где A_{ε} , B_{ε} , C_{ε} и D_{ε} — так называемые обобщенные параметры или *A*-параметры четырехполюсника. Индекс «э» означает, что имеются в виду «эквивалентные» параметры всего четырехполюсника, который в общем виде может состоять из нескольких четырехполюсников.

Соединим каскадно два одинаковых четырехполюсника по принципу согласования характеристических сопротивлений, как показано на рис. 88. Если матрица *A*-параметров первого равна

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix},$$

то матрица A -параметров второго имеет вид:

$$\begin{vmatrix} D & B \\ C & A \end{vmatrix}.$$

Параметры полученного эквивалентного четырехполюсника:

$$A_0 = AD + BC.$$

$$B_0 = 2AB,$$

$$C_0 = 2CD,$$

$$D_0 = BC + AD.$$

Подставив эти значения параметров в формулу (299), найдем сопротивление передачи эквивалентного четырехполюсника при $R_r = R_n = R$:

$$Z_{\text{прив}} = 2(ADR + BCR + AB + CDR^2). \quad (300)$$

Предположим теперь, что сопротивление нагрузки и все сопротивления правого четырехполюсника увеличены в n раз. Обращаясь к физическому смыслу каждого из параметров A , B , C и D , легко убедиться, что такое

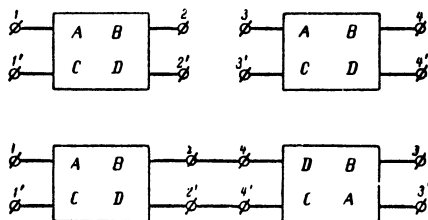


Рис. 88. Цепочное (каскадное) соединение двух четырехполюсников.

изменение всех сопротивлений четырехполюсника никак не отражается на величине параметров A и D , но приводит к увеличению параметра B в n раз и к уменьшению параметра C в n раз.

Обозначив параметры правого четырехполюсника после преобразования символами A_1 , B_1 , C_1 и D_1 , получим: $A_1 = A$, $D_1 = D$, $B_1 = nB$, $C_1 = \frac{C}{n}$.

Сопротивление передачи всего эквивалентного четырехполюсника после преобразования оказывается равным:

$$Z'_{\text{прив}} = (1 + n)(ADR + BCR + AB + CDR^2). \quad (301)$$

Сравнивая (300) и (301), находим:

$$Z'_{\text{прив}} = \frac{Z_{\text{прив}}}{2} (1 + n),$$

откуда с учетом (298)

$$a'_p = a_p + \ln \left| \frac{1+n}{2} \right|.$$

Остается пояснить, что увеличение всех сопротивлений правого четырехполюсника в n раз соответствует увеличению всех его индуктивностей и активных (действительных) сопротивлений в n раз и уменьшению всех емкостей во столько же раз.

Сделанные нами предположения (схемы обоих четырехполюсников одинаковы, четырехполюсники соединены по принципу согласования характеристических сопротивлений) равносильны утверждению, что преобразуемый эквивалентный четырехполюсник симметричен относительно вертикальной оси. Это условие обязательно должно быть учтено при определении количества и типа звеньев фильтра, который предполагают подвергнуть рассмотренному преобразованию.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица 1

Гиперболические функции действительного аргумента

a	$\operatorname{th} a$	$\operatorname{cth} a$	a	$\operatorname{th} a$	$\operatorname{cth} a$
0,00	0,0000	∞	1,15	0,8177	1,223
0,05	0,0500	20,02	1,20	0,8336	1,200
0,10	0,0997	10,03	1,25	0,8483	1,179
0,15	0,1489	6,716	1,30	0,8617	1,160
0,20	0,1974	5,066	1,35	0,8740	1,144
0,25	0,2440	4,083	1,40	0,8853	1,129
0,30	0,2913	3,433	1,45	0,8957	1,116
0,35	0,3364	2,973	1,50	0,9051	1,105
0,40	0,3799	2,632	1,55	0,9138	1,094
0,45	0,4219	2,370	1,60	0,9217	1,085
0,50	0,4621	2,164	1,70	0,9354	1,069
0,55	0,5005	1,998	1,80	0,9468	1,056
0,60	0,5371	1,862	1,90	0,9562	1,046
0,65	0,5717	1,749	2,00	0,9640	1,037
0,70	0,6044	1,655	2,20	0,9757	1,025
0,75	0,6351	1,574	2,40	0,9837	1,017
0,80	0,6640	1,506	2,60	0,9890	1,011
0,85	0,6911	1,447	2,80	0,9926	1,007
0,90	0,7163	1,396	3,00	0,9950	1,005
0,95	0,7398	1,352	3,50	0,9982	1,002
1,00	0,7616	1,313	4,00	0,9993	1,001
1,05	0,7818	1,279	5,00	0,9999	1,0001
1,10	0,8005	1,249			

Таблица 2

Переход от переменной η к переменной t или y

η	t	y	$y, см$	η	t	y	$y, см$
1,00	∞	∞	∞	1,24	1,691	0,525	10,6
1,01	7,124	1,963	39,3	1,26	1,644	0,497	9,9
1,02	5,075	1,624	32,5	1,28	1,602	0,471	9,4
1,03	4,174	1,429	28,6	1,30	1,565	0,448	8,0
1,04	3,641	1,292	25,9	1,35	1,489	0,398	7,0
1,05	3,280	1,188	23,8	1,40	1,429	0,357	7,1
1,06	3,015	1,104	22,1	1,45	1,381	0,323	6,5
1,07	2,811	1,034	20,7	1,50	1,342	0,294	5,9
1,08	2,648	0,974	19,5	1,60	1,281	0,248	4,0
1,09	2,511	0,922	18,4	1,70	1,237	0,212	4,2
1,10	2,400	0,876	17,5	1,80	1,203	0,185	3,7
1,11	2,304	0,835	16,7	1,90	1,176	0,162	3,2
1,12	2,220	0,798	16,0	2,0	1,154	0,144	2,9
1,13	2,148	0,764	15,3	2,2	1,123	0,116	2,3
1,14	2,083	0,734	14,7	2,4	1,100	0,095	1,9
1,15	2,025	0,706	14,1	2,6	1,084	0,080	1,6
1,16	1,973	0,680	13,6	2,8	1,071	0,068	1,4
1,17	1,926	0,656	13,1	3,0	1,061	0,059	1,2
1,18	1,884	0,633	12,7	3,5	1,043	0,043	0,9
1,19	1,845	0,612	12,2	4,0	1,033	0,032	0,6
1,20	1,809	0,593	11,9	5,0	1,021	0,020	0,4
1,22	1,746	0,557	11,1	∞	1,000	0	0

Таблица 3

Шаблон затухания звена

y	$a, неп$	$y, см$	$a, см$	t
2,084	0,25	41,7	0,5	8,037
1,905	0,30	38,1	0,6	6,719
1,753	0,35	35,1	0,7	5,772
1,623	0,40	32,5	0,8	5,068
1,508	0,45	30,2	0,9	4,518
1,407	0,50	28,1	1,0	4,084
1,316	0,55	26,3	1,1	3,728
1,233	0,60	24,7	1,2	3,432
1,158	0,65	23,2	1,3	3,184
1,090	0,70	21,8	1,4	2,974
1,026	0,75	20,5	1,5	2,790
0,968	0,80	19,4	1,6	2,633
0,913	0,85	18,3	1,7	2,492

<i>y</i>	<i>a, нп</i>	<i>y, см</i>	<i>a, см</i>	<i>t</i>
0,863	0,90	17,3	1,8	2,370
0,816	0,95	16,3	1,9	2,261
0,772	1,00	15,4	2,0	2,164
0,731	1,05	14,6	2,1	2,077
0,692	1,10	13,8	2,2	1,998
0,656	1,15	13,1	2,3	1,927
0,622	1,20	12,4	2,4	1,863
0,590	1,25	11,8	2,5	1,804
0,560	1,30	11,2	2,6	1,751
0,531	1,35	10,6	2,7	1,701
0,504	1,40	10,1	2,8	1,655
0,478	1,45	9,6	2,9	1,613
0,454	1,50	9,1	3,0	1,575
0,431	1,55	8,6	3,1	1,539
0,409	1,60	8,2	3,2	1,505
0,389	1,65	7,8	3,3	1,476
0,370	1,70	7,4	3,4	1,448
0,351	1,75	7,0	3,5	1,420
0,334	1,80	6,7	3,6	1,397
0,317	1,85	6,3	3,7	1,373
0,301	1,90	6,0	3,8	1,351
0,286	1,95	5,7	3,9	1,331
0,272	2,00	5,4	4,0	1,313
0,246	2,1	4,9	4,2	1,279
0,223	2,2	4,4	4,4	1,250
0,201	2,3	4,0	4,6	1,223
0,182	2,4	3,6	4,8	1,2000
0,165	2,5	3,3	5,0	1,179
0,149	2,6	3,0	5,2	1,161
0,135	2,7	2,7	5,4	1,145
0,122	2,8	2,4	5,6	1,130
0,110	2,9	2,2	5,8	1,116
0,0997	3,0	2,0	6,0	1,105
0,0816	3,2	1,6	6,4	1,085
0,0668	3,4	1,3	6,8	1,069
0,0547	3,6	1,1	7,2	1,056
0,0447	3,8	0,9	7,6	1,046
0,0366	4,0	0,7	8,0	1,037
0,300	4,2	0,6	8,4	1,030
0,0246	4,4	0,5	8,8	1,025
0,0201	4,6	0,4	9,2	1,020
0,0165	4,8	0,33	9,6	1,017
0,0135	5,0	0,27	10,0	1,013
0,0090	5,4	0,18	10,8	1,009
0,0060	6,0	0,10	12,0	1,006

Таблица 4

Шаблон характеристической фазовой постоянной звена

x	$x, \text{ см}$	$b, \text{ см}$	$b \text{ (рад)}/\pi$	x	$x, \text{ см}$	$b, \text{ см}$	$b \text{ (рад)}/\pi$
$-\infty$	$-\infty$	0,00	0,00	+0,063	+0,6	2,08	0,52
-3,460	-34,6	0,08	0,02	+0,126	+1,3	2,16	0,54
-2,766	-27,7	0,16	0,04	+0,190	+1,9	2,24	0,56
-2,359	-23,6	0,24	0,06	+0,254	+2,5	2,32	0,58
-2,069	-20,7	0,32	0,08	+0,319	+3,2	2,40	0,60
-1,843	-18,4	0,40	0,10	+0,386	+3,9	2,48	0,62
-1,657	-16,6	0,48	0,12	+0,455	+4,5	2,56	0,64
-1,499	-15,0	0,56	0,14	+0,525	+5,3	2,64	0,66
-1,360	-13,6	0,64	0,16	+0,598	+6,0	2,72	0,68
-1,236	-12,4	0,72	0,18	+0,674	+6,7	2,80	0,70
-1,124	-11,2	0,80	0,20	+0,754	+7,5	2,88	0,72
-1,022	-10,2	0,88	0,22	+0,838	+8,4	2,96	0,74
-0,927	-9,3	0,96	0,24	+0,927	+9,3	3,04	0,76
-0,838	-8,4	1,04	0,26	+1,022	+10,2	3,12	0,78
-0,754	-7,5	1,12	0,28	+1,124	+11,2	3,20	0,80
-0,674	-6,7	1,20	0,30	+1,236	+12,4	3,28	0,82
-0,598	-6,0	1,28	0,32	+1,360	+13,6	3,36	0,84
-0,525	-5,3	1,36	0,34	+1,498	+15,0	3,44	0,86
-0,455	-4,5	1,44	0,36	+1,657	+16,6	3,52	0,88
-0,386	-3,9	1,52	0,38	+1,843	+18,4	3,60	0,90
-0,319	-3,2	1,60	0,40	+2,069	+20,7	3,68	0,92
-0,254	-2,5	1,68	0,42	+2,359	+23,6	3,76	0,94
-0,190	-1,9	1,76	0,44	+2,766	+27,7	3,84	0,96
-0,126	-1,3	1,84	0,46	+3,460	+34,6	3,92	0,98
-0,063	-0,6	1,92	0,48	$+\infty$	$+\infty$	4,00	1,00
0,000	0,0	2,00	0,50				

Таблица 5

Переход от переменной η к переменной x

η	x	$x, \text{ см}$	η	x	$x, \text{ см}$
0,10	-2,298	-23,0	0,21	-1,538	-15,4
0,11	-2,201	-22,0	0,22	-1,489	-14,9
0,12	-2,113	-21,1	0,23	-1,443	-14,4
0,13	-2,032	-20,3	0,24	-1,397	-14,0
0,14	-1,956	-19,6	0,25	-1,354	-13,5
0,15	-1,886	-18,9	0,26	-1,312	-13,1
0,16	-1,820	-18,2	0,27	-1,271	-12,7
0,17	-1,757	-17,6	0,28	-1,232	-12,3
0,18	-1,698	-17,0	0,29	-1,194	-12,0
0,19	-1,642	-16,4	0,30	-1,157	-11,6
0,20	-1,589	-15,9	0,31	-1,121	-11,2

η	x	$x, \text{ см}$	η	x	$x, \text{ см}$
0,32	-1,085	-10,9	0,65	-0,156	-1,6
0,33	-1,051	-10,5	0,66	-0,130	-1,3
0,34	-1,017	-10,2	0,67	-0,103	-1,0
0,35	-0,984	-9,8	0,68	-0,075	-0,8
0,36	-0,952	-9,5	0,69	-0,048	-0,5
0,37	-0,921	-9,2	0,70	-0,020	-0,2
0,38	-0,890	-8,9	0,71	+0,008	+0,1
0,39	-0,859	-8,6	0,72	+0,037	+0,4
0,40	-0,829	-8,3	0,73	+0,066	+0,7
0,41	-0,800	-8,0	0,74	+0,095	+1,0
0,42	-0,770	-7,7	0,75	+0,126	+1,3
0,43	-0,742	-7,4	0,76	+0,156	+1,6
0,44	-0,713	-7,1	0,77	+0,188	+1,9
0,45	-0,685	-6,9	0,78	+0,220	+2,2
0,46	-0,658	-6,6	0,79	+0,253	+2,5
0,47	-0,630	-6,3	0,80	+0,288	+2,9
0,48	-0,603	-6,0	0,81	+0,323	+3,2
0,49	-0,576	-5,8	0,82	+0,360	+3,6
0,50	-0,549	-5,5	0,83	+0,397	+4,0
0,51	-0,523	-5,2	0,84	+0,437	+4,4
0,52	-0,496	-5,0	0,85	+0,478	+4,8
0,53	-0,470	-4,7	0,86	+0,522	+5,2
0,54	-0,444	-4,4	0,87	+0,568	+5,7
0,55	-0,418	-4,2	0,88	+0,617	+6,2
0,56	-0,392	-3,9	0,89	+0,669	+6,7
0,57	-0,366	-3,7	0,90	+0,725	+7,3
0,58	-0,340	-3,4	0,91	+0,786	+7,9
0,59	-0,314	-3,1	0,92	+0,853	+8,5
0,60	-0,288	-2,9	0,93	+0,928	+9,3
0,61	-0,262	-2,6	0,94	+1,013	+10,1
0,62	-0,235	-2,4	0,95	+1,113	+11,1
0,63	-0,209	-2,1	0,96	+1,232	+12,3
0,64	-0,183	-1,8	0,97	+1,384	+13,8

Таблица 6

Шаблон времени задержки звена

$x, \text{ см}$	$Z, \text{ см}$	$x, \text{ см}$	$Z, \text{ см}$	$x, \text{ см}$	$Z, \text{ см}$	$x, \text{ см}$	$Z, \text{ см}$
0	10,0	7	8,0	14	4,6	22	2,2
1	9,9	8	7,4	15	4,2	24	1,8
2	9,8	9	7,0	16	3,9	26	1,5
3	9,6	10	6,5	17	3,5	28	1,2
4	9,2	11	6,0	18	3,2	30	1,0
5	8,9	12	5,5	19	3,0	35	0,6
6	8,4	13	5,1	20	2,7	40	0,4

СВЯЗЬ МЕЖДУ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ И ТЭТА-ФУНКЦИЯМИ

При анализе и практических расчетах могут оказаться полезными формулы, выражающие эллиптические функции через так называемые тэта-функции ϑ_0 , ϑ_1 , ϑ_2 и ϑ_3 . Последние могут быть представлены посредством быстроходящихся тригонометрических рядов:

$$\vartheta_0 = \vartheta_0 \left(\frac{u}{K}, h \right) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n h^{n^2} \cos 2n \frac{\pi u}{2K};$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_1 \left(\frac{u}{K}, h \right) = 2h^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n h^{n(n+1)} \sin (2n+1) \frac{\pi u}{2K};$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_2 \left(\frac{u}{K}, h \right) = 2h^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} h^{n(n+1)} \cos (2n+1) \frac{\pi u}{2K};$$

$$\vartheta_3 = \vartheta_3 \left(\frac{u}{K}, h \right) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} h^{n^2} \cos 2n \frac{\pi u}{2K},$$

где

$$h = e^{-\frac{\pi K'}{K}} \text{ и } nn = n^2.$$

Эллиптические функции выражаются через тэта-функции следующим образом:

$$\operatorname{sn}(u, k) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1}{\vartheta_0};$$

$$\operatorname{cn}(u, k) = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2}{\vartheta_0};$$

$$\operatorname{dn}(u, k) = \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3}{\vartheta_0}.$$

Быстрая сходимость рядов позволяет в большинстве случаев ограничиться подстановкой в формулы эллиптических функций только двух первых членов каждого ряда. К этому приему мы неоднократно прибегали в ходе предшествующего изложения.

СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ ПОЛОСОВЫХ ФИЛЬТРОВ

Система обозначений величин элементов звеньев полосовых фильтров с несимметричными характеристиками, принятая в [Л. 8] и в этой книге, при поверхностном рассмотрении может показаться сложной и необоснованной. В действительности же цифры и знаки, фигурирующие в индексах букв L и C , обозначающих различные элементы схемы, содержат информацию как о конфигурации схемы, так и о резонансных частотах некоторых колебательных контуров, входящих в схему.

Прежде всего, рассматривая схемы звеньев на рис. 60—62, легко заметить, что буквами с одним штрихом помечены элементы схем П-образных звеньев полосовых фильтров, а буквами с двумя штрихами — элементы схем Т-образных звеньев.

Проверяя графическим способом (см. § 10) наличие и положение полюсы пропускания звеньев, изображенных на рис. 60, можно убедиться, что резонансная частота каждого параллельного колебательного контура, образующего параллельную ветвь П-образного звена, обязательно должна совпадать либо с верхней (f_1), либо с нижней (f_{-1}) частотой среза. В соответствии с этим элементы контура имеют индекс 1 или -1 . То же самое относится к последовательным колебательным контурам, образующим последовательные ветви Т-образных звеньев.

Аналогичные контуры П- и Т-образных звеньев на рис. 61 и 62 настраиваются на частоты, отличающиеся от частот среза фильтра, и поэтому помечены индексом m .

В случае П-образных звеньев элементы последовательной ветви служат для создания полюсов затухания. Полюс при нулевой частоте создается емкостью, полюс при бесконечно большой частоте — индуктивностью, полюс при конечной частоте — параллельным колебательным контуром. Если полюс, создаваемый элементом (или двумя элементами, образующими параллельный контур), расположен на оси частот ниже полосы пропускания, то соответствующий элемент обозначается буквой с индексом «—» (минус). Если полюс расположен выше полосы пропускания, то элементы, создающие этот полюс, обозначаются буквами с индексом «+» (плюс).

Такой же смысл имеют индексы «—» и «+» в обозначениях элементов параллельной ветви Т-образных звеньев. Только здесь полюс затухания при нулевой частоте создается индуктивностью, при бесконечно большой частоте — емкостью, а при конечной частоте — последовательным колебательным контуром.

ЛИТЕРАТУРА

1. Альбац М. Е., Справочник по расчету электрических фильтров и линий задержки, Госэнергоиздат, 1963.
 2. Белецкий А. Ф., Теоретические основы электропроводной связи, Связьиздат, 1959.
 3. Босый Н. Д., Электрические фильтры, Гостехиздат УССР, 1960.
 4. Гарновский Н. Н., Теоретические основы электропроводной связи, Связьиздат, 1956.
 5. Каллер М. Я., Теория электрических цепей, Трансжелдориздат, 1962.
 6. Коган С. С., Теория и расчет фильтров для установок дальней связи, Связьиздат, 1950.
 7. Кощеев И. А., Основы теории электрической связи, Связьиздат, 1954.
 8. Линке, Расчет сложных фильтров, Госэнергоиздат, 1948.
 9. Собенин Я. А., Расчет полиномиальных фильтров, Связьиздат, 1963.
 10. Guillemin E. A., Synthesis of passive networks, New York, Wiley, 1957.
-

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Введение	5
Глава первая. Характеристические параметры четырехполюсника	7
1. Понятие о четырехполюснике	7
2. Характеристические сопротивления четырехполюсника	8
3. Характеристическая постоянная передачи четырехполюсника	11
4. Понятие о гиперболических функциях	14
5. Соединение четырехполюсников по принципу согласования характеристических сопротивлений	17
Глава вторая. Звенья типа k и m фильтров нижних частот	22
6. Понятие о частотном электрическом фильтре	22
7. Условие пропускания	23
8. Г-образное звено фильтра нижних частот	25
9. Т- и П-образные звенья	34
10. Графический метод анализа звеньев	36
11. Параллельно-производное звено типа m	37
12. Последовательно-производное звено типа m	50
13. Рабочее затухание фильтра	57
Глава третья. Расчет фильтров нижних частот	65
14. Способы задания требований к фильтру	65
15. Выбор характеристических сопротивлений фильтра	66
16. Затухание эха	73
17. Некоторые вопросы расчета	76
18. Способы определения количества и типа звеньев	79
19. Расчет по семейству кривых характеристического затухания	81
20. Аналитический способ расчета	82
21. Расчет с помощью шаблона (лекала)	97
22. Шаблон характеристической фазовой постоянной	103
23. Шаблон времени задержки звена	105
24. Потери в элементах фильтра	107
	215

Глава четвертая. Фильтры верхних частот, полосовые и заграждающие	115
25. Фильтры верхних частот	115
26. Преобразование частоты	118
27. Расчет полосовых фильтров	128
28. Заграждающие фильтры	135
29. Полосовые фильтры с несимметричными характеристиками затухания	140
30. Расчет фильтров с несимметричными характеристиками с помощью шаблона	149
31. Номограммы для определения затухания, обусловленного потерями	163
Глава пятая. Мостовые фильтры и их расчет	171
32. Схема и параметры мостового четырехполюсника	171
33. Схемы мостовых фильтров нижних частот	173
34. Основы расчета мостовых фильтров	179
35. Синтез функции $\text{th } \frac{g}{2}$	184
36. Синтез реактивного двухполюсника	187
37. Расчет и практические схемы мостовых фильтров	194
Глава шестая. Включение фильтра между неодинаковыми нагрузочными сопротивлениями	199
38. Фильтр как согласующий четырехполюсник	199
39. Включение фильтра между неодинаковыми нагрузочными сопротивлениями	201
Приложение 1	207
Приложение 2	212
Приложение 3	213
Литература	214

Цена 64 коп.